

Kapitel 1

Einleitung

David Hilbert schreibt im Artikel „Über das Unendliche“ (Math. Ann. 95, 1925, Seite 163): *„Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.“* Im Zuge meiner Diplomarbeit möchte ich nun erläutern, wo die Wurzeln des Unendlichen liegen, welche Problematiken es mit sich brachte und welche Lösungsversuche es gab. Da das Gebiet sehr umfangreich ist, beschränke ich mich auf Entwicklungen vor dem 20. Jahrhundert. Auch der Bereich der Geometrie wird von mir nicht näher erläutert.

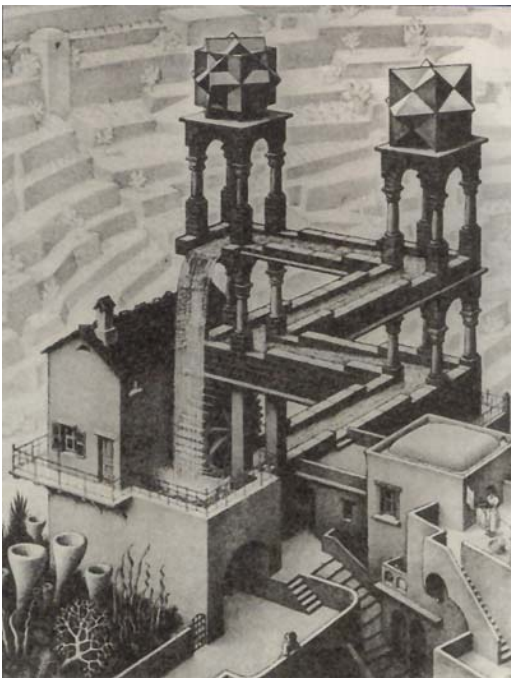
Bereits die Vorsokratiker, z. B. Anaximander, arbeiten eine Bedeutungsvielfalt für den Begriff des Unendlichen aus, doch eine Präzisierung erfolgt erst durch Aristoteles. Dieser stellt das potentiell Unendliche dem aktual Unendlichen gegenüber (siehe Kapitel 2.5). Als potentiell Unendliches wird nur das anerkannt, was man durch schrittweise Konstruktion in endlich vielen Schritten erreichen kann. Das bedeutet, dass man z. B. immer weiter zählen kann, ohne an ein Ende zu gelangen. Bei der aktualen Unendlichkeit hingegen stellt man sich eine (in welcher Weise auch immer) existierende Gesamtheit vor.

Nachdem man in der Antike glaubte, mit dem Unendlichen umgehen zu können, brachte die Entwicklung der Infinitesimalrechnung erneut den Stein ins Rollen. Das Hauptproblem ist hier das Verständnis und die Darstellung von Grenzprozessen mit Hilfe unendlich kleiner Größen, die allerdings nie eine richtige Definition erhielten. So entstanden zahlreiche Probleme aufgrund des Fehlens einer Begriffsbestimmung. Glaubte man auch dieses Problemfeld überwunden zu haben, so beginnt im 19. Jahrhundert die Auseinandersetzung mit dem unendlich Großen, im Sinne von unendlich großen Gesamtheiten.

Die natürlichen Zahlen sind das einfachste Beispiel für das mathematisch Unendliche bzw. einer unendlichen Menge, da jede natürliche Zahl n einen Nachfolger $n + 1$ besitzt. Der Übergang von n auf $n + 1$ um die Folge der natürlichen Zahlen zu erhalten, ist zugleich Grundlage für das Prinzip der Induktion, und entspricht dem „potentiell Unendlichen“. Nimmt man die Gesamtheit der natürlichen Zahlen, sprich die Menge \mathbb{N} , so hat man ein aktual Unendliches.

Dennoch muss man zwischen dem Unendlichen in der Mathematik und dem in der Philosophie unterscheiden. In der Mathematik bezieht sich das Unendliche auf Objekte, für die betont werden soll, dass die zugrunde liegenden Mengen nicht endlich sind. Häufig verwendet man dazu das von John Wallis (1616 – 1703) eingeführte Unendlichkeitssymbol ∞ . In der Philosophie bezeichnet das Unendliche dasjenige, das keine Grenze hat und daher nicht bestimmt werden kann, das unvorstellbar Große oder Göttliche.

Doch das Unendliche kann noch in ganz anderer Weise „gedeutet“ werden. So hört man im Alltag oft Ausdrücke der Art „Die unendlichen Weiten des Meeres“ oder „Das tut mir unendlich leid.“ wie auch „Ich bin so unendlich traurig.“. Hier ist das Unendliche ein Ausdruck für etwas sehr Großes oder wird im Sinn von sehr viel, unüberschaubar viel oder unvorstellbar viel verwendet – meistens jedoch, in mathematischer und philosophischer Hinsicht, fehl am Platz. Denn „die unendlichen Weiten des Meeres“ sind eigentlich nur endlich und so etwas wie unendliche Traurigkeit gibt es nicht. Des Weiteren kann man das Unendliche als immer wiederkehrend oder nie aufhörend interpretieren. Ein Beispiel dafür wäre das „Perpetuum mobile“. Dies ist eine Apparatur, die sich selbst durch ihre eigene Energie „für immer“ oder „ewig“ in Gang hält. Vom theoretischen Standpunkt aus ist dies zwar möglich, jedoch praktisch nicht. Doch nicht nur in der Physik, sondern auch in der Kunst oder Musik ist ein Perpetuum mobile zu finden. In der Musik wurde der Ausdruck „unendliche Melodie“ von Richard Wagner geprägt. Das bedeutet, dass eine Melodie immer weiter fortgespielt werden kann, wenn der Dirigent sie nicht beendet.



In dieser Darstellung von M. C. Escher ist ein Perpetuum mobile zu erkennen. Das Wasser fließt den Wasserfall bergab und dann wieder zu diesem hinauf, und wird von seiner eigenen Energie in Gang gehalten. Somit wäre der Wasserfall nie unterbrochen – also immerwährend.

Auf derartige vorwissenschaftliche Auffassungen des Unendlichen wird in der Arbeit nicht näher eingegangen. Dagegen werden Paradoxien, die schon beim ersten Erfassen dieses Begriffes bei den Griechen und auch später immer wieder auftraten, genauer behandelt (siehe Kapitel 2.4 und Kapitel 4.1).