Kapitel 2

Die Anfänge des Unendlichen bei den Griechen

2.1 Das Apeiron (απειρον)

Seit dem Beginn der abendländischen Philosophie spielt das Problem des Unendlichen eine Rolle im Bereich metaphysischer[1] Spekulationen, sowie in Untersuchungen der Naturphilosophie und der exakten Wissenschaften, vor allem in der Mathematik.
In der philosophischen Diskussion um das Unendliche konzentrierte man sich vor allem auf folgende Themen:

(1) Einführung des Begriffs des Unendlichen
(2) Verhältnis zwischen dem Endlichen und Unendlichen
(3) Der ontologische[2] Status des Unendlichen, d.h. potentiell oder aktual
(4) Der kosmologische Status des Unendlichen, d.h. räumliche oder zeitliche Unendlichkeit des Universums oder der Welt
(5) Quantitative bzw. qualitative Erfassung des Unendlichen
(6) Paradoxien des Unendlichen

Ein erster vieldeutiger Begriff des Unendlichen ist der Begriff „apeiron" (das ist „das Unbegrenzte, das Endlose"). Dieser trat schon sehr früh im griechischen Geistesleben auf, als man begann, sich über die Entstehung und den Aufbau der Welt Gedanken zu machen. Der Astronom, Philosoph und Mathematiker Anaximander oder Anaximandros (ca. 610 – 546 v. Chr.), ein Schüler von Thales von Milet, versteht unter dem „apeiron" einen unentstandenen, unveränderlichen und unzerstörbaren Urstoff der Welt, der die alleinige Ursache allen Entstehens und Vergehens ist. Er muss „unendlich" sein, damit – wie Anaximander sagt – das Werden nicht aufhört. Aus diesem Urstoff sind nach ihm alle Dinge entstanden und in ihn kehren sie auch wieder zurück. Er enthält alle Bestimmungen der Welt. Konkrete Dinge entstehen durch Formung und Begrenzung des Urstoffs. Darüber hinaus nimmt Anaximander an, dass es unzählig viele Welten gibt, die ohne Ende entstehen und vergehen, „indem in ewiger Bewegung aus sterbenden Welten neue geboren werden". Durch ihn erhält der Begriff somit seine Bedeutungsvielfalt: grenzenlos, unbestimmt, unvorstellbar groß, göttlich oder unvergänglich.

In späterer Zeit verliert für die griechischen Philosophen dieser Begriff an Bedeutung. Platon sieht im „apeiron" nur noch ein Unbegrenztes im Sinne eines Untergeordneten oder Unbestimmten. Aristoteles lehnt das „apeiron" grundsätzlich

---

[1] Metaphysik bedeutet das Übersinnliche, das über die Natur (Physik) Hinausgehende. Metaphysik ist eine philosophische Disziplin, die die Dinge in Hinsicht auf ihr Dingsein zu erkennen versucht.
[2] Ontologie ist die Philosophie des Seins.

ab, da nach ihm das Unendliche nicht erkennbar ist und daher kann es auch nicht als wirklich existierend angenommen werden (siehe Kapitel 2.5).

2.2 Pythagoras und die Pythagoreer

Die Frage: „*Sind die Dinge bis ins Unendliche teilbar*?“ wurde vermutlich zum ersten Mal in der Schule der Pythagoreer gestellt, deren Begründer Pythagoras (569 – 500 v. Chr.) ist. Für ihn sind Zahlen Geschöpfe, die sich in den Dingen zeigen. Dementsprechend ist jedes Ding aus Teilen zusammengesetzt und die Anzahl der Teile entspricht der Zahl. Die Teilbarkeit der Dinge hat aber nach seiner Vorstellung auf jeden Fall ein Ende. Ein Grund dafür könnte sein, dass die Pythagoreer das Unbegrenzte mit dem Bösen identifizieren, das Begrenzte hingegen gilt als das Gute.

Die Ansicht der Pythagoreer lässt sich in dem Satz zusammenfassen: „*Alles ist Zahl*“. Dies kann man als mathematische Betrachtung der Naturgesetze interpretieren: „*Zahlen beherrschen das Universum*.“[3] Zahl ist hier gleichbedeutend mit natürlicher Zahl. Die Eins bildet dabei die Einheit, auch Monade genannt. Mit Hilfe dieser Einheit sollen alle anderen Vielheiten gemessen werden können.

Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch die Pythagoreer erschütterte deren Weltbild. Sie wurde vermutlich beim Problem der Quadratverdopplung entdeckt. Dabei musste man erkennen, dass die Quadratdiagonale zur Quadratseite in keinem ganzzahligen Verhältnis steht, dieses Verhältnis also nicht durch Zahlen ausgedrückt werden kann. Die Quadratdiagonale wurde als *arrhéton* (unsagbar) angesehen, später als *asymmetron* (unmessbar) und schließlich als *mékei asymmetron*, aber *dynamei symmetron* (der Länge nach unmessbar, aber messbar dem Quadrat nach). Das bedeutet, dass es zwar nicht möglich war die Länge der Diagonale anzugeben, aber die Fläche des dazugehörigen Quadrates schon.

Das Problem der Verdopplung des Quadrates (als eine Zahl) hat eventuell auch zur arithmetischen Erkenntnis geführt, dass keine Quadratzahl existiert, die das Doppelte einer anderen Quadratzahl ist. Aber man fand Zahlen, die diese Bedingung fast erfüllen, z. B. die Zahl 50. 25 ist eine Quadratzahl und das Doppelte ergibt 50. Gleichzeitig ist 49 ebenfalls eine Quadratzahl (7^2). Bildet man also ein Quadrat mit 5 Einheiten Seitenlänge und eines mit 7 Einheiten Seitenlänge, so unterscheiden sich die Fläche des großen Quadrates und die doppelte Fläche des kleinen Quadrates nur um das Einheitsquadrat. D.h. nun, dass die Diagonale eines Quadrates mit 5 Einheiten Seitenlänge annähernd 7 Einheiten beträgt. Solche „sagbaren“ Diagonalen wurden von den Pythagoreern zu einem System entwickelt, wobei es eine unendliche Anzahl solcher Seiten- und Diagonalzahlen gibt. Die ersten sechs dieser Zahlen lauten:[4]

---

[3] Maor E.: „Dem Unendlichen auf der Spur“, Seite 59
[4] Szabó A.: „Entfaltung der griechischen Mathematik“, Seite 202

a_n	d_n	$2a_n^2$	d_n^2	Abweichung
1	1	2	1	+1
2	3	8	9	-1
5	7	50	49	+1
12	17	288	289	-1
29	41	1682	1681	+1
70	99	9800	9801	-1

Bildet man hier jeweils das Verhältnis d:a und berechnet den entsprechenden unendlichen Dezimalbruch, so kann man eine Annäherung an $\sqrt{2}$ erkennen:

$$\begin{aligned}
1 : 1 &= 1 \\
3 : 2 &= 1{,}5 \\
7 : 5 &= 1{,}4 \\
17 : 12 &= 1{,}41\dot{6} \\
41 : 29 &= 1{,}41379310345 \\
99 : 70 &= 1{,}41428571429 \\
\sqrt{2} &= 1{,}41421356237
\end{aligned}$$

Interessant ist dabei, dass sich die Dezimalbrüche jeweils von oben und unten dem gesuchten Wert nähern, ihn aber nie erreichen. Beträgt die Abweichung (siehe Tabelle) +1, so nähert sich der Bruch von unten, bei –1 nähert er sich von oben. Dass diese Art der Berechnung von den Griechen noch nicht durchgeführt wurde, ist einleuchtend, kannten sie ja noch keine Dezimalbrüche oder Verhältnisse, die als Brüche aufgefasst wurden. Es stellt sich daher die Frage, wie die Griechen die unendlich vielen Seiten- und Diagonalzahlen gefunden haben. Die Antwort liegt in der Geometrie: zur Bestimmung der Kommensurabilität zweier Größen benutzten sie die Wechselwegnahme. Sie kann als Kettenbruchentwicklung interpretiert werden. Dieses Prinzip besteht darin, dass man die kleinere von der größeren Größe abzieht, der dadurch entstehende Rest wird nun von der kleineren Größe abgezogen usw. Endet das Verfahren, sind die Größen kommensurabel, andernfalls inkommensurabel. Im Buch X der „*Elemente*“ besagt Satz 2 dazu: „*Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher Größen immer die kleinere von der größeren weg und mißt der Rest niemals die vorangehende Größe, so sind die beiden Größen inkommensurabel*.“[5] Und dieser Fall tritt gerade bei den Größen der Quadratdiagonale und –seite auf.

Der Beweis dafür sei kurz skizziert:
Gegeben ist ein Quadrat [ABCD]. Subtrahiert man AB von AC (= d), so kommt man zum Punkt E, wo AE = AB. Errichtet man eine Normale in E, so schneidet diese die Seite BC in F, und man erhält die neue Diagonale d_1 = FC des kleineren Quadrates (rot). Diesen Prozess kann man nun beliebig oft wiederholen – man erhält immer wieder ein kleineres Quadrat (grün).

Doch wie geht man im umgekehrten Fall vor, wenn man mit dem kleineren Quadrat (rot) beginnt und das größere Quadrat bilden will? Aus der Zeichnung wird ersichtlich, dass BC = $a_1 + d_1$ und daher ist AC = $2a_1 + d_1$. Und genau das entspricht den Rekursionsformeln: $a_n = a_{n-1} + d_{n-1}$ und $d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1}$, die die Zahlen in der Tabelle liefern. □

[5] derselbe, Seite 339

Ob diese Theorie allerdings wirklich zur Entdeckung der unendlichen Reihe der Seiten- und Diagonalzahlen geführt hat, ist umstritten.

Der arithmetische Beweis für die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale zur –seite sieht folgendermaßen aus (er stammt vermutlich aus voreuklidischer Zeit):
Angenommen wird das Gegenteil – die Diagonale (d) und die Seite (a) sind kommensurabel. Die Diagonale halbiert das Quadrat und es entsteht ein rechtwinkeliges, gleichschenkeliges Dreieck. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras ergibt sich

$$d^2 = 2\,a^2$$

Angenommen die Seite und die Diagonale haben ein gemeinsames Maß e und es gilt:

$d = pe$, $a = qe$, wo p, $q \in \mathbb{N}$ und gekürzt sind: ggT (p, q) = 1.

$$d^2 = 2a^2$$
$$(pe)^2 = 2\,(qe)^2$$
$$p^2 = 2q^2$$

p^2 ist gerade, also auch $2q^2$. Ist das Quadrat einer Zahl gerade, so auch sie selbst, d.h. auch p ist gerade. Eine gerade Quadratzahl ist auch immer durch 4 teilbar, also auch $2q^2$. Ist $2q^2$ durch 4 teilbar, so ist q^2 durch 2 teilbar und daher eine gerade Zahl. Daraus folgt, dass auch q gerade ist.
=> p und q sind gerade Zahlen, was gegen die Annahme ist, d.h. es gibt kein gemeinsames Maß e.

□

Dies ist der älteste bekannte Beweis für die Inkommensurabilität der Diagonale zur Seite. Erstaunlich ist, dass hier keinerlei Anschaulichkeit mehr vorhanden ist, denn ursprünglich versuchte man die Sätze geometrisch-anschaulich zu beweisen.

Die Frage, wie man mit irrationalen Verhältnissen rechnen sollte, löste Eudoxos (408 – 355 v. Chr.) dadurch, dass er streng zwischen Zahlen und Verhältnissen von Strecken unterschied – nur Verhältnisse können irrational sein. Er entwickelte eine vollständige Theorie über irrationale Verhältnisse: Dabei definiert er nicht, was ein Verhältnis zweier Zahlen/Größen ist, sondern wann zwei Größen überhaupt ein Verhältnis haben und wann zwei solche Verhältnisse gleich sind: („Elemente" V, Definition 4; auch bekannt als Archimedisches Axiom): „*Zwei Größen haben zueinander ein Verhältnis, wenn sie vervielfacht einander übertreffen können*."[6] und („Elemente" V, Definition 5): „*Größen stehen in demselben Verhältnis, die erste zur zweiten und die dritte zur vierten, wenn die gleichen Vielfachen der ersten und dritten und die gleichen Vielfachen der zweiten und vierten – bei jeder beliebigen Vervielfachung – einander entweder zugleich übertreffen oder gleichkommen oder unterschreiten, in entsprechender Ordnung genommen*."[7]

[6] derselbe, Seite 84. Dieses Axiom dürfte erstmals von Eudoxos formuliert worden sein.
[7] Becker O.: „Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung", Seite 84

D.h. sind *a, b, c, d* die 4 gegebenen Größen, so ist

$a : b = c : d \Leftrightarrow$ für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: (1) $ma > nb$ und $mc > nd$
(2) $ma = nb$ und $mc = nd$
(3) $ma < nb$ und $mc < nd$

Dazu kommt noch Definition 7 (ebenfalls Buch V), die modern formuliert so aussieht:

$a : b > c : d$, wenn $\exists\ m, n \in \mathbb{N}$ mit $ma > nb$ und $mc < nd$.

Nun ist es möglich Größenbeziehungen zwischen Verhältnissen aufzustellen bzw. zu klären und umzuformen. Dazu dienen Sätze der Art:[8]
Satz 7 + 9: Wenn $a = b$, dann $a : c = b : c$ und $c : a = c : b$, und umgekehrt.
Satz 8 + 10: Wenn $a > b$, dann $a : c > b : c$ und $c : b > c : a$, und umgekehrt.
Satz 11: Wenn $a : b = c : d$ und $c : d = e : f$, dann $a : b = e : f$.

Und Sätze zur Umformung der Proportionen, wie z. B.:
Satz 16: Wenn $a : b = c : d$, dann $a : c = b : d$.
Satz 17 + 18: Wenn $a : b = c : d$, dann $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$.
Satz 22: Wenn $a : b = d : e$ und $b : c = e : f$, dann ist $a : c = d : f$.

Exemplarisch seien die Sätze 7 und 9 bewiesen:
Seien *ma*, *mb*, *nc* Vielfache von *a*, *b*, *c*. Dann ist wegen $a = b$ *ma* entweder größer, kleiner oder gleich als *nc*, je nachdem ob *mb* größer, kleiner oder gleich *nc* ist. *nc* ist größer, kleiner oder gleich *ma*, je nachdem ob *nc* größer, kleiner oder gleich als *mb* ist, für alle *m*, *n*. Nach Definition 5 folgt dann der Satz.

Archimedes verwendet dies z. B. zur Bestimmung des Verhältnisses von Umfang und Durchmesser des Kreises (siehe Kapitel 2.6).

2.3 Die Atomisten Leukipp und Demokrit von Abdera

Leukipp (ca. 470 – 360 v. Chr.) gilt als der Begründer der Schule der Atomisten, doch Demokrit von Abdera (ca. 470 – 380 v. Chr.) ist der bedeutendste Vertreter. Er hat den Atomismus weiterentwickelt und ausgebaut. Von ihm ist bekannt, dass er ca. 50 Schriften veröffentlicht hat – für die damalige Zeit eine ungewöhnliche Zahl.

Leukipp versucht ionische Kosmologie und westgriechische Ontologie zusammenzubringen – das Ergebnis ist der Atomismus. Andere Quellen sind allerdings der Meinung, dass der Atomismus aus der Auseinandersetzung mit dem Eleatismus (Kapitel 2.4) entstanden sei. Fragen bezüglich des Raumes und der Zeit bleiben hier nämlich offen und Demokrits „Leeres" könnte eine Antwort auf die Frage nach dem Raum sein.

[8] vgl. derselbe, Seite 85f

Ein Atom ist ein unteilbarer Körper, unveränderlich, nicht entstanden und unzerstörbar. Auf Grund dieser Eigenschaften werden die Atome auch als das Seiende bezeichnet. Für die Atome gibt es verschiedene Namen (das Volle, Ideen, Etwas, Seiendes...), die jeweils einen bestimmten Aspekt bedeuten. Die „Idee“ meint hier z. B. die sich dem (geistigen) Sehen darbietende Form. Die Eigenschaften des Atoms – Größe und Gestalt – sind geometrische Begriffe. Somit wird es in seinem Sein und Verhalten von geometrischen Qualitäten bestimmt. Die Atome selbst sind sinnlich nicht wahrnehmbar, nur diejenigen Dinge, die aus ihnen zusammengesetzt sind. Alles in unserer Welt besteht aus Atomen. Die Eigenschaften der Dinge werden durch Form, Position und Anordnung der kleinsten Teilchen bestimmt.

Die Atome befinden sich im unendlichen leeren Raum (das „Leere“) und bewegen sich ständig (unkoordiniert). Der leere Raum hat keine bestimmte Form und ist auch nicht undurchdringlich oder fest. In diesem Sinn ist der Raum „nichtseiend“, da er keine Eigenschaften des Seienden besitzt. Auf ihn treffen jedoch gewisse Charakteristika des Seienden zu, wie Ewigkeit und Unveränderlichkeit. Daher existiert das Leere genauso wie die Atome auch. Im unendlichen Raum muss es nach Demokrit unendlich viele Atome geben, sowie unendlich viele – oder zumindest eine unabzählbare Menge – von verschiedenen Atomformen. Treffen im leeren Raum an einer Zone viele Atome zusammen, so kommt es zu einem Zusammenprall und die Atome verflechten sich. Bei diesen Verflechtungen berühren sich die Atome allerdings nur (Berührung meint bei Demokrit, dass sich die Oberflächen der Atome passend aufeinander fügen) und „verbinden“ sich nicht, denn es wäre unsinnig zu sagen, aus zwei (oder mehr) wird eins. Zu dieser Anhäufung kommen aus dem All wiederum Schwärme von Atomen hinzu, die dieser einen bestimmten Bewegungsimpuls geben. Die Atome in der Anhäufung selbst bewegen sich ebenfalls. Die gesamte Atommenge beginnt nun sich in eine Richtung zu bewegen – ein Wirbel entsteht. Innerhalb des Wirbels werden Atome von verschiedener Größe ausgesondert – dies bewirkt das Entstehen von Erde, Meer, Luft und Sternen. Entstehen und Vergehen entspricht also dem Zusammenfügen und Trennen von Atomen.
Da jeder Gegenstand, jedes Ding aus Atomen zusammengesetzt ist, ist eine Teilung bis zu den letzten unteilbaren Größen möglich. Demokrit postuliert die gleichzeitige allseitige Teilung für bereits geschehen – sagt aber nicht, wie man sich diese vorstellen soll (z. B. immer weiter halbieren wie bei Zenon). Er meint nur, wenn man etwas zerteilt und dann wieder zusammensetzt, so erhält man wieder dasselbe. Genauso verhält es sich, wenn man etwas an einem bestimmten Punkt zerschneidet. „*Also ist es überall potentiell geteilt*.“[9]

Demokrit argumentiert auch schon mit „infinitesimalen“ Größen: Ein Punkt ist die kleinste materielle Einheit. Teilt man eine Linie (ABC) in zwei Linien, so ist B sowohl Endpunkt (B_0) als auch Anfangspunkt (B^0). Wird der Punkt nun als ein „Etwas“ angenommen, so müsste $AB_0 + B^0C$ länger sein als ABC, da ja ein Punkt dazugekommen wäre ($B_0 + B^0$ statt B). Der Punkt ist aber eine Nullgröße, also ist $AB_0 + B^0C = ABC$. Der Punkt kann also einen Körper weder größer noch kleiner machen.

[9] Löbl R.: „Demokrit“, Seite 44

Er versucht auch mit Hilfe einer dem Cavalierischen Prinzip (siehe Kapitel 3.1) ähnlichen Methode das Verhältnis von Kegelvolumen und Volumen des Zylinders (bei gleicher Grundfläche und Höhe) zu berechnen. Dabei stellt er sich vor, dass Kegel und Zylinder aus unendlich vielen, unendlich schmalen Querschnittsschichten parallel zur Grundfläche bestehen. Daraus resultiert aber folgendes Problem: Schneidet man einen Kegel parallel zur Basis, so ergibt sich die Frage, ob die Schnittflächen gleich oder ungleich sind. Sind sie ungleich, so wird der Kegel beim Zusammensetzen ungleichmäßig. Sind sie aber gleich, dann könnte man glauben, der Kegel hätte dieselben Eigenschaften wie der Zylinder. Daraus wird auch ersichtlich, dass Demokrit vermutlich die Idee oder Vorstellung hatte, dass ein Körper aus unendlich vielen parallelen Ebenen besteht, die unendlich nahe beieinander liegen.

Der Atomismus wurde vor allem durch die neuzeitliche Atomtheorie berühmt. Karl Marx meinte, dass die Atomisten die einzigen akzeptablen Philosophen des Altertums waren.

2.4 Der Eleat Zenon von Elea

Zenon von Elea (495 – 435 v. Chr.) stiftet große Verwirrung unter den Mathematikern seiner Zeit – schuld daran sind seine Paradoxien. In diesen versucht er vor allem zu beweisen, dass das unendlich Kleine nicht existiert bzw. versucht er eine Welt der Vielheit und Ausgedehntheit zu widerlegen (Gegensatz zu Pythagoreern). Nach einigen Überlieferungen soll Zenon sogar mehr als 40 Argumente gegen die Vielheit gehabt haben. Vielheiten bestehen aus Einheiten; diese sind unteilbar. Wenn aber etwas unteilbar ist, kann es keine Größe haben, denn Größen sind immer bis ins Unendliche teilbar. Die Teile, aus denen das Viele/die Vielheit besteht, besitzen also keine Größe. Daher kann nichts größer oder kleiner werden, wenn man einen solchen Teil hinzufügt oder wegnimmt, er ist also nichts. Daraus folgt, dass das Viele unendlich klein sein muss, da die Bestandteile „nichts“ sind.

Doch es steckt noch mehr dahinter. Ausgangspunkt einer Paradoxie ist immer ein problematischer Begriff – bei Zenon die unendliche Teilbarkeit des Kontinuums. Die Eleaten leugnen prinzipiell Raum und Bewegung – damit wäre aber keinerlei Geometrie möglich. Leugnen der Bewegung heißt hier, dass man die Bewegung zwar sinnlich wahrnehmen kann, aber sie ist nicht durch logisches, widerspruchsfreies Denken begreifbar. Somit wurde von den Eleaten die Widersprüchlichkeit der Erscheinungen der Sinneswelt (Verändern, Bewegen, Entstehen,...) nachgewiesen. Raum und Zeit gelten als widerspruchsvoll. Alles Widerspruchsvolle ist aber „nichtseiend“. Daher zweifeln sie auch an der Existenz des Raumes im Allgemeinen. Platon meint dazu, dass man den Raum ohne die sinnliche Wahrnehmung erkennen kann. Der Raum kann als unendlich teilbar im menschlichen Denken erscheinen. Daraus folgt, dass es kein Kleinstes im Raum – und damit auch nicht in der Geometrie – geben kann. Um aber das „Kleinste“ in der Geometrie zu finden (den Punkt), benötigt man das unendliche Teilen, das als widersinnig empfunden wird. Diese Problematiken könnten zum axiomatischen Aufbau der Geometrie geführt haben.

2.4.1 Die Paradoxie von Achill und der Schildkröte

Achill läuft mit einer Schildkröte um die Wette, wobei die Schildkröte 1 m Vorsprung erhält. Sobald Achill aber diesen Vorsprung eingeholt hat, ist die Schildkröte schon ein Stück weiter gelaufen. Erreicht er nun diesen Punkt, ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter usw. Graphisch sieht dieser Prozess folgendermaßen aus: Die immer kleiner werdenden Wegstücke sind bald nicht mehr wahrnehmbar. Achill muss unendlich viele dieser Stücke zurücklegen. Das Ende erreicht er allerdings nie bzw. er kann die Schildkröte nie überholen, da eine unendliche Menge von Stücken nicht in endlicher Zeit durchlaufen werden kann. Der regressus ad infinitum betrifft also die sich proportional verringernde Strecke. Aristoteles versucht dies zu widerlegen, indem er meint, dass nicht nur der Raum, sondern auch die Zeit in immer kleiner werdende Stücke geteilt wird. Damit kann Achill die Schildkröte ein- und überholen, da er innerhalb einer endlichen Zeitspanne unendlich viele Zeitstücke zur Verfügung hat (potentielle Unendlichkeit).

Die mathematische Formulierung des Problems sieht so aus:
Angenommen Achill legt 1 m/s zurück und die Schildkröte 0,1 m/s. Erhält die Schildkröte nun 1 m Vorsprung, so benötigt Achill 1 s um ihre Startposition zu erreichen. Die Dauer des Wettlaufes in Sekunden lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\cdots$$

Das Ergebnis dieser unendlichen Reihe kann folgendermaßen berechnet werden:
$q=\frac{1}{10} \Rightarrow s=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-{}^{1}\!/_{10}}=\frac{10}{9}$, d.h. nach $\frac{10}{9}$ Sekunden hat Achill die Schildkröte eingeholt.

Dieses Paradoxon lässt sich auch mengentheoretisch interpretieren, wenn man annimmt, dass die Punkte, die Achill und die Schildkröte zurücklegen, einander entsprechen. Die zurückgelegten Strecken können punktweise umkehrbar eindeutig zugeordnet werden. Das entspricht der Tatsache, dass zwei aktual unendliche Mengen gleichmächtig sein können, obwohl die eine Menge ein echter Teil der anderen ist (der Weg der Schildkröte ist ein echter Teil des Weges von Achill).

2.4.2 Das Läuferparadoxon

Beim Läuferparadoxon geht es darum, dass ein Läufer von Punkt A nach Punkt B laufen will. Um diesen Weg zu überwinden, muss er zuerst die Hälfte dieser Strecke überwinden, dann die Hälfte dieser Hälfte usw. Das bedeutet, dass der Läufer den Endpunkt B nie erreichen wird. Die mathematische Beschreibung dieses Paradoxons ist folgende:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

Diese geometrische Reihe konvergiert gegen 1, wenn die Anzahl der Summanden gegen unendlich strebt: $q = \frac{1}{2}$, damit ist die Summe: $s = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$.

Nimmt man nun aber an, dass der Läufer eine konstante Geschwindigkeit beibehält, so entsprechen die Zeitintervalle, die er zum Zurücklegen der Entfernung benötigt, ebenfalls dieser Reihe. Damit erreicht er das Ziel in einer endlichen Zeitspanne, wie es der Realität entspricht.

Interessant ist hier auch die Umkehrung dieser Paradoxie: Bevor der Läufer das ganze Stück durchläuft, muss er zuerst die Hälfte, dann die Hälfte dieser Hälfte usw. durchlaufen, d.h. er kann eigentlich gar nicht anfangen zu laufen. Hier kommt man mit dem vorhin erwähnten aristotelischen Gegenargument in Schwierigkeiten – aufgrund der Definition des „apeiron“ als potentiell unendlich: die Strecke ist hier immer weiter teilbar – ohne Grenze. Bei Zenon wird aber die Endlichkeit der Strecke, die immer halbiert wird, vorausgesetzt! Der regressus ad infinitum betrifft also die sich proportional verringernde Strecke.

2.4.3 Pfeilparadoxon

Das Pfeilparadoxon ist, im Gegensatz zu den beiden vorhin erwähnten, ein Problem der Bewegung: Ein Schütze schießt einen Pfeil ab. Dieser ist in jedem Augenblick entweder in Ruhe oder in Bewegung. „*Wäre der Pfeil in einem bestimmten Augenblick in Bewegung, so würde dies zugleich die Teilbarkeit eines Augenblicks implizieren*.“[10] Zeit wird hier als eine Aneinanderreihung von unteilbaren Momenten angesehen. Der Schluss, der daraus gezogen wird, ist dann, dass sich der Pfeil nicht bewegen kann, da er sich zu jedem Zeitpunkt an einer bestimmten Stelle befindet. Der Gedankengang ist hier folgender: Bewegung bedeutet Ortswechsel. Nichts kann gleichzeitig an zwei Orten sein. Der Gegenstand (Pfeil) ist also immer an einem Ort, der seiner Größe entspricht, er bewegt sich nicht. An einem anderen Ort kann er sich auch nicht bewegen, also bewegt er sich überhaupt nicht. Aristoteles meint dazu: Der Irrtum besteht darin, dass Zenon die Zeit aus Jetztpunkten zusammensetzt – dies ist aber nicht möglich, da das auf keine Größe zutrifft. Der (sich bewegende) Jetztpunkt teilt zwar die Zeit, aber er ist kein Teil der Zeit, „*da ein Teil der Zeit als ein Ausgedehntes immer selbst ein Ausgedehntes sein muss*.“[11]

Der Jetztpunkt dient zum Einteilen der Zeit bzw. zum Zählen der Zeit. Im „Jetzt“ herrscht weder Bewegung noch Ruhe, wobei keine Bewegung nicht automatisch Ruhe bedeutet. Vlastos meint dazu in K. v. Fritz: „*Schriften zur griechischen Logik*“, Seite 77: Sagt man, der Pfeil bewegt sich in einem (ausdehnungslosen) Augenblick nicht, so impliziert dies noch nicht, dass er darin ruhen muss. Es ist nur sinnlos von einem Punkt zu sprechen, der sich bewegt oder sich in Ruhe befindet. Wendet man die Formel $v = \frac{s}{t}$ auf ausdehnungslose Augenblicke an, so ergibt sich: $v = \frac{0}{0}$ - dies ist aber kein Wert. Will man, dass der Pfeil ruht, muss

[10] Lauwerier H.: „Unendlichkeit – Denken im Grenzenlosen“, Seite 15
[11] Szabó A.: „Anfänge der griechischen Mathematik“, Seite 76

v = 0 und t positiv sein: $v = \frac{0}{t}$, d.h. in der Zeitstrecke wurde kein Weg zurückgelegt. Die Frage, wie sich ein Pfeil in einem Zeitintervall nicht bewegen kann, wenn er sich nicht in jedem Augenblick bewegt, hängt damit zusammen, dass es Bewegung und Ruhe nicht in einzelnen Zeitpunkten, sondern nur in Intervallen (geordneten Mengen von Zeitpunkten) gibt.

Dies führt zu einer mengentheoretischen Lösung: Jedes ausgedehnte Intervall enthält eine nicht abzählbare unendliche Menge von ausdehnungslosen Elementen (der Länge 0). Eine kurze Linie hat also keine größere Mächtigkeit als eine unendlich lange Linie. Die Addition ist daher nicht auf die letzten Elemente kontinuierlicher ausgedehnter Größen anwendbar. Man kann deswegen nicht schließen, dass die Summe von unendlich vielen Elementen unendlich ist.

2.5 Aristoteles

Aristoteles (384 – 322 v. Chr.) beschäftigt sich mit dem Unendlichen vor allem im Bereich des Kontinuums, das mit Raum, Zeit und Bewegung verbunden ist, und im Bereich der Zahlen und Größen. Er ist auch der erste, der die Gegenüberstellung von aktual Unendlich (εντελεχεια απειρον) und potentiell Unendlich (δυναμει απειρον) vornimmt. Potentiell unendlich hat hier die Bedeutung von „Immer-weiter-zählen-können“, also ein Verfahren, das nicht abbricht. Aktuale Unendlichkeit dagegen ist durch die Vorstellung bestimmt, dass es eine Art „Gesamtheit“ gibt, z. B. die „Gesamtheit“ oder Menge der natürlichen Zahlen.

Welchen Zugang hat Aristoteles zum Unendlichen? Er meint, dass die Begrenzung ein Prinzip der Naturordnung ist. Da alles in Gegensatzpaaren angenommen wird, muss es auch hiezu einen Gegensatz geben – das Unbegrenzte (το απειρον). Zu diesem kommt man seiner Meinung nach aus fünf Gründen:

1. Durch die Zeit, da sie unendlich ist
2. Dadurch, dass alle Größen teilbar sind
3. Werden und Vergehen in der Natur sind durch das Unendliche bestimmt
4. Alles, was begrenzt ist, muss auch eine Grenze haben, daher kann es keine letzte Grenze geben.
5. Die Zahlen sind unendlich, denn zählt man in Gedanken, so kommt man nie an ein Ende.

Prinzipiell ist Aristoteles (und später auch Gauß) allerdings der Meinung, dass das Unendliche nur ein mögliches, aber kein wirkliches Dasein hat. Was bedeutet das? Er sagt einerseits, dass das Unbegrenzte an sich nicht teilbar ist, andererseits aber gibt es unbegrenzt viele Mengen von Dingen. Um diesen Widerspruch aufzulösen unterscheidet er unbegrenzt der Möglichkeit und der Wirklichkeit nach. Unbegrenzt der Möglichkeit nach bedeutet, dass es eine bestimmte Tätigkeit „erleiden“ kann, z. B. „erleidet“ das Kontinuum unendlich viele Teilungen.

Kontinuum ist für Aristoteles eine Struktur, und zwar eine Grundstruktur der Anschaulichkeit der Welt, keine mathematische Idee. Dementsprechend untersucht er auch nur Phänomene der Anschauung. Dies wird auch daraus erkennbar, dass das Unbegrenzte für ihn immer mit Sinnesdingen verbunden ist. Ein unbegrenzter Körper z. B. ist schon alleine deswegen nicht möglich, da er nicht wahrnehmbar ist.

Kontinuierlich oder stetig sind Dinge bei Aristoteles dann, wenn die Ränder eine Einheit bilden, d.h. die Grenzen halten zusammen und trennen nicht. „*Stetig sei ein Ding, wenn die Grenze eines jeden zweier nächstfolgender Theile, mit der dieselben sich berühren, eine und die nämliche wird und, wie es auch das Wort bezeichnet, zusammengehalten wird*."[12] Bewegung kann durch diese Grenzen hindurchströmen. Im Begriff der Bewegung ist die Kontinuität faktisch schon enthalten. Diese ist aber nicht ohne Ort oder Zeit möglich. Daher sind diese ebenfalls kontinuierlich bzw. haben eine kontinuierliche Struktur.

Ein Kontinuum ist überall teilbar, kann daher nicht aus (geometrischen) Punkten bestehen, da diese unteilbar sind. Eine Linie z. B. ist immer wieder – allerdings in Linien - teilbar. Teilt man ein Kontinuum, so erhält man wiederum ein Kontinuum bzw. mehrere Kontinua. Aber, dass das Kontinuum ins Unbegrenzte teilbar ist, bedeutet nicht, dass dasselbe aus unendlich vielen Teilen besteht. Vielmehr wird dadurch ausgedrückt, dass die Tätigkeit des Teilens unendlich oft wiederholt werden kann. Aufgrund dessen schließt Aristoteles, dass das Kontinuum nicht aus unteilbaren Einheiten zusammengesetzt sein kann, sonst wäre keine unendliche Teilbarkeit möglich. Ein weiterer Grund, warum das Kontinuum nicht aus Unteilbaren zusammengesetzt sein kann, ist, dass sich diese nicht berühren. Es ist also eine potentiell (und nicht aktual) unendliche Punktmenge.

Das Unendliche ist bei Aristoteles an Additivität (Hinzufügung) und Teilbarkeit gebunden. Diese können unbegrenzt vollzogen werden, wobei Hinzufügung auf Zahlen bezogen ist und Teilbarkeit auf kontinuierliche Größen. Die Teilbarkeit hat aber auch eine Grenze. Dies versucht er an folgendem Beispiel zu erläutern: Ein Tier, z. B. eine Katze, hat eine bestimmte Größe. Damit müssen auch ihre Bestandteile eine bestimmte Größe haben und deswegen ist sie nicht bis ins Unbegrenzte zerlegbar – eine Grenze existiert. Bei den Zahlen bildet die Einheit diese Grenze. Prinzipiell sind Zahlen für Aristoteles Gattungsbegriffe bzw. Prädikate, d.h. Zahl gibt es nur durch Zählen, selbständige Zahlen existieren nicht. Definiert ist sie als eine begrenzte Vielheit, wobei zwischen Zahl und Größe folgender Zusammenhang besteht: Zahl = diskrete, begrenzte Größe

2.6 Archimedes und die Methode der Exhaustion

Der Mathematiker und Naturwissenschaftler Archimedes von Syrakus (287 – 212 v. Chr.) widmete sich im Bereich der Mathematik vor allem der Berechnung von Flächeninhalten bzw. Volumina. Des weiteren fand er eine ziemlich genaue Näherung von π. Für erste Berechnungen gebraucht er die Methode der Exhaustion. Diese Methode basiert auf folgendem Satz von Euklid: „*Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies*

[12] Cantor M: „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", Band 1, Seite 191

immer, dann muss einmal eine Größe übrigbleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.“[13]
Allgemein formuliert sieht dieser Satz folgendermaßen aus:

$$a_n < \frac{1}{2} a_{n-1} < \frac{1}{4} a_{n-2} < \cdots < \frac{1}{2^n} a_0$$

Bei Archimedes muss man allerdings zwischen zwei Arten von Exhaustionsmethoden unterscheiden:

(1) Kompressionsmethode: Der gesuchte Wert wird dadurch gefunden, dass er zwischen eine monoton fallende und steigende Folge eingeschlossen wird.
(2) Approximationsmethode: Der gesuchte Wert entspricht dem Grenzwert einer unendlichen, konvergenten Reihe.

Zur allgemeinen Berechnung mittels der Exhaustionsmethode beruft sich Archimedes oft auf das Archimedische Axiom (siehe Kapitel 2.2). Ein Beispiel für die erste Methode ist die Berechnung des Kugelvolumens bzw. die Berechnung von π mittels des Kreisumfanges.

Kugelvolumen:
Archimedes approximiert zunächst die Halbkugel mittels einbeschriebener Zylinder der Höhe *h*:

Das Volumen der eingeschriebenen Zylinder ist durch folgende Summe gegeben:

$$V_E = r_1^2 \pi h + r_2^2 \pi h + \cdots + r_n^2 \pi h = \pi h \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \pi h (\sum_{i=1}^{n} r^2 - \sum_{i=1}^{n} (ih)^2) =$$

$$= \pi h n r^2 - \pi h h^2 \sum_{i=1}^{n} i = \pi r^3 - \pi h^3 \sum_{i=1}^{n} i^2 < \cdots < \pi r^3 - h^3 \pi \frac{n^3}{3} = r^3 \pi - \frac{1}{3} r^3 \pi = \frac{2}{3} r^3 \pi$$

Dabei lässt sich die Abschätzung von $\sum_{i=1}^{n} i^2$ so einsehen:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) > \frac{1}{6} nn2n = \frac{n^3}{3}$$

Archimedes argumentiert wesentlich umständlicher, da er die Summenformel nicht kennt. Das Ergebnis dieser Abschätzung ist also: $V_E < \frac{2}{3} r^3 \pi$

Dasselbe macht Archimedes nun für die umschriebenen Zylinder:

$$V_U = r_0^2 \pi h + r_1^2 \pi h + \cdots + r_{n-1}^2 \pi h = \pi h \sum_{i=0}^{n-1} r_i^2 = \pi h \left(\sum_{i=o}^{n-1} r^2 - h^2 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \right) =$$

$$\pi (hn) r^2 - \pi h^3 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = r^3 \pi - \pi h^3 \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

Diese Summe kann man folgendermaßen abschätzen:

[13] Euklid: Buch VII der „Elemente“, Satz 1

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) < \frac{1}{6}nn2n = \frac{1}{3}n^3$$

Setzt man dies ein, erhält man:

$$> r^3\pi - \pi h^3 \frac{1}{3}n^3 = r^3\pi - \frac{1}{3}r^3\pi = \frac{2}{3}r^3\pi$$

Somit erhält man einerseits: $V_E < \frac{2}{3}r^3\pi$ und andererseits: $V_U > \frac{2}{3}r^3\pi$.

Nun vergleicht Archimedes V_E und V_U mit dem Volumen V_Z des der Halbkugel umschriebenen Zylinders (mit $r = h$):

$$\frac{V_Z}{V_E} > \frac{r^3\pi}{\frac{2}{3}r^3\pi} = \frac{3}{2} \qquad\qquad \frac{V_Z}{V_U} < \frac{r^3\pi}{\frac{2}{3}r^3\pi} = \frac{3}{2}$$

Wäre nun $\frac{V_Z}{V_{\frac{1}{2}K}} \neq \frac{3}{2}$, so kann man im Falle $\frac{V_Z}{V_{\frac{1}{2}K}} > \frac{3}{2}$ h so klein wählen, dass aufgrund der Exhaustionsmethode $\frac{V_Z}{V_E} < \frac{V_Z}{V_{\frac{1}{2}K}}$ ausfällt. Das hieße jedoch $V_{\frac{1}{2}K} < V_E$, ein Widerspruch. Analog schließt man im anderen Fall $\frac{V_Z}{V_{\frac{1}{2}K}} < \frac{3}{2}$.

Es folgt somit:

$$\frac{V_Z}{V_{\frac{1}{2}K}} = \frac{3}{2} \Rightarrow V_{\frac{1}{2}K} = \frac{2}{3}V_Z = \frac{2}{3}r^3\pi \Rightarrow V_K = \frac{4}{3}r^3\pi$$.[14]

Berechnung von π:

Die Zahl π berechnet Archimedes mit folgendem Verfahren näherungsweise: Er schreibt einem gegebenen Kreis reguläre Vielecke ein, deren Seitenzahl zunimmt. Der Umfang jedes dieser Polygone ist dann kleiner als der des Kreises. Je mehr Seitenzahlen man für das Vieleck verwendet, umso mehr schmiegt es sich dem Kreis an. Wenn man also den Umfang dieser Polygone ermittelt und ihn durch den Radius des Kreises dividiert, erhält man eine gute Näherung für 2π. Archimedes wendet dieses Verfahren auf Polygone mit 6, 12, 24, 48 und 96 Seiten an. Für das 96-seitige Polygon erhält er: $3\frac{10}{71} \approx 3{,}1408451$.

Dazu entwickelt Archimedes eine Regel, um aus dem Umfang des ein- bzw. umschriebenen n-Ecks, den Umfang des $2n$-Ecks zu erhalten: [15]

[14] Prof. Kowol: „Geschichte der Mathematik“, VO

AB ... Durchmesser des Kreises
BC ... Seite des eingeschriebenen *n*-Ecks, s_n
BD ... s_{2n}
AD ... halbiert den Winkel BAC

Die Winkel ABD, BPD, APC sind zueinander ähnlich und es ergibt sich daraus:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BP}{BD},\frac{AC}{AD}=\frac{PC}{BD}$$

Addition: $\frac{AB+AC}{AD}=\frac{BP+PC}{BD}$, wobei BP + PC = BC

⇨ AD : BD = (AB + AC) : BC

Für die Quadrate gilt: AD² : BD² = (AB + AC)² : BC² [AB = AC = AD]

AB² : BD² = (2AB² + 2 AB AC) : BC²

Ist der Radius des Kreises 1, so ist AB = 2 und es gilt:

$$4:s_{2n}^2=(8+4AC):s_n^2 \qquad AC^2=AB^2-BC^2=4-s_n^2$$

$$4:s_{2n}^2=\left(8+4\sqrt{4-s_n^2}\right):s_n^2$$

$$s_{2n}^2\left(8+4\sqrt{4-s_n^2}\right)=4s_n^2$$

$$s_{2n}^2=\frac{s_n^2}{2+\sqrt{4-s_n^2}}$$

Diese Formel dient nun dazu, um aus der Seite des einbeschriebenen *n*-Ecks s_n, die Seite des einbeschriebenen 2*n*-Ecks s_{2n} zu berechnen.
Start: $s_6 = 1$

$$s_{12}^2=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow s_{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\approx 0{,}5176$$

$$\Rightarrow 12s_{12}=u_{12}\approx 6{,}2117$$

$$s_{24}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\approx 0{,}2611$$

$$u_{24}\approx 6{,}2653$$

$$s_{48}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\approx 0{,}1308$$

$$u_{48}\approx 6{,}2787$$

$$s_{96}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}\approx 0{,}0654$$

$$u_{96}\approx 6{,}2821>2\cdot 3\frac{10}{71}\text{(untereAbschätzung)}$$

Analog geht er nun mit den umschriebenen Seiten der *n*-Ecke vor:

$$\frac{2}{t_{2n}}=\frac{2}{t_n}+\sqrt{1+\left(\frac{2}{t_n}\right)^2}$$

[15] Toeplitz O.: „Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung“, Seite 20

Hier erhält er für den Umfang des 96-seitigen Polygons: $3{,}1428 < 2 \cdot 3\frac{10}{70}$. π liegt also irgendwo zwischen den beiden Werten: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$. Theoretisch wäre es nun möglich, die Seitenzahlen des Polygons bis ins Unendliche wachsen zu lassen. Dann erhielte man den genauen Wert von 2π. Mathematisch ausgedrückt ist 2π also der Limes des Verhältnisses von Umfang zu Radius der Polygone, wo die Seitenzahlen gegen unendlich streben.

Ein Beispiel für die zweite Exhaustionsmethode ist die Quadratur der Parabel. Folgende Definition wird von Archimedes zu Grunde gelegt:

$$PV : PW = VQ^2 : WR^2$$

Satz: „*Jedes von einer Parabel und einer Sehne QQ′ begrenzte Segment ist gleich vier Drittel des (einbeschriebenen) Dreiecks, das dieselbe Grundlinie wie das Segment und gleiche Höhe hat*.“[16]

Beweis: Setze K = $\frac{4}{3}\Delta PQQ'$ (dies sei zu zeigen)

(1) Fläche des Segments ist größer als K:
PQ und PQ′ schneiden Segmente ab, in denen wiederum Dreiecke eingeschrieben werden sollen – mit derselben Grundfläche und Höhe. In die neuen Segmente werden wiederum Dreiecke eingeschrieben usw.
Es gilt:
VQ : WR = 2 : 1
⇨ $VQ^2 : WR^2 = 4 : 1 = PV : PW$
⇨ PV = 4 PW

$$\left.\begin{array}{l}\Delta RUQ = \frac{1}{2}\Delta USQ \\ \Delta PRU = \frac{1}{2}\Delta PUS\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PRQ = \frac{1}{2}\Delta PSQ = \frac{1}{4}\Delta PVQ = \frac{1}{8}\Delta PQQ'$$

Da jeweils zwei Dreiecke eingefügt werden, kommt insgesamt $\frac{1}{4}\Delta PQQ'$ dazu.

Ist $A = \Delta PQQ', B = \Delta PRQ + \Delta PR'Q'$, dann ist $B = \frac{1}{4}A$. Genauso verfährt man mit den übrigen Dreiecken, dann ist $C = \frac{1}{4}B$ usw.

Die Summe der übrigen Segmente ist kleiner als die Fläche, „um die das Segment PQQ′ die Fläche K übertrifft.“ Daher ist das entstandene Vieleck größer als K. Dies ist allerdings unmöglich, wegen:

Satz: „*Ist eine Reihe von Flächen A, B, C, D, ... , Z gegeben, von denen A die größte ist, und ist jedes das Vierfache der nächstfolgenden, so gilt die Beziehung*

$$A + B + C + ... + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A.\text{“}^{17}$$

[16] Kliem F.: „Archimedes´ Werke“, Seite 369

Beweis: b, c, d, ... seien Flächen, die folgendermaßen definiert sind:

$$b = \frac{1}{3}B, c = \frac{1}{3}C, d = \frac{1}{3}D \text{ usw.}$$

$b = \frac{1}{3}B$ und $B = \frac{1}{4}A$, daraus folgt: $B + b = \frac{1}{3}A$, sowie $C + c = \frac{1}{3}B$ usw.

Daraus ergibt sich:

$$B + C + D + ... + Z + b + c + d + ... + z = \frac{1}{3}(A + B + C + ... + Y)$$

$$b + c + d + \dots + y = \frac{1}{3}(B + C + D + ... + Y)$$

Subtrahiert man beide Zeilen, erhält man :

$$B + C + D + ... + Z + z = \frac{1}{3}A \quad \text{bzw.}$$

$$A + B + C + D + ... Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A$$

□

Somit: $A + B + C + ... + Z < \frac{4}{3}A$, wo $A = \Delta PQQ'$

Daraus ergibt sich, dass die Fläche des Segments nicht größer sein kann als K.

(2) Fläche des Segments ist kleiner als K:

Sei wie zuvor $\Delta PQQ' = A$, $B = \frac{1}{4}A$, $C = \frac{1}{4}B$ usw. Setzt man dies bis X fort, wo X kleiner als die Differenz zwischen K und dem Segment ist, so gilt (voriger Satz)

$$A + B + C + ... + X + \frac{1}{3}X = \frac{4}{3}A$$

K übertrifft die Summe um eine Fläche kleiner als X, und K übertrifft die Fläche des Segments um eine Fläche größer als X. Daraus folgt

$$A + B + C + ... + X > \text{Fläche des Segments (unmöglich)}$$

Da also K weder größer noch kleiner als die Fläche des Segments ist, gilt:

$$\text{Fläche des Segments} = \frac{4}{3}\Delta PQQ'$$

□

Archimedes umgeht also den unendlichen Prozess, indem er stets einen indirekten Beweis führt. Um den Widerspruch aufzuweisen, muss man die Approximation nur beschränkt weit verfolgen, man muss also keinen Grenzübergang durchführen.

[17] derselbe, Seite 368