Kapitel 3

Die Infinitesimalrechnung

3.1 Die Methode der Indivisibilien

Im Mittelalter steht der Begriff der Unendlichkeit vor allem in Zusammenhang mit theologischen Spekulationen und dem Indivisibilienproblem. Die Indivisibilien sind die Vorläufer der unendlich kleinen Größen und sind nicht weiter teilbare bzw. unteilbare geometrische Objekte. Der Begriff selbst rührt von einer lateinischen Übersetzung des Ausdrucks „τα ατομα" als „indivisibilia" aus der Aristotelischen „*Demokritkritik*". Die Indivisibilienmethode wurde von Bonaventura Cavalieri und Evangelista Torricelli begründet und erwies sich als wichtige Etappe auf dem Weg zur Infinitesimalrechnung.

Die Methode beruht darauf, das Verhältnis von zwei Flächen durch die sie erzeugenden Indivisibilien zu bestimmen. Philosophisch betrachtet bedeutet sie eine Abkehr von der vorherrschenden Ansicht des Aristoteles. Eine Fläche wird nämlich jetzt als aus aktual unendlich vielen Indivisibilien bestehend angesehen.

3.1.1 Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647)

Cavalieri stellt vor allem geometrische und philosophische Spekulationen über das Unendliche an. Seine Theorie wurde fast bis ans Ende des 19. Jahrhunderts vertreten und erst durch Cantors und Dedekinds Auffassung überholt.

Cavalieri ist der wichtigste Vertreter der Indivisibilienmethode. Ein Indivisibilium ist heterogen zum Kontinuum, das bis ins Unendliche teilbar ist. Das Indivisibilium hat aber eine Dimension weniger als das geometrische Kontinuum, dem es angehört, d.h. der Punkt ist das Indivisibilium der Linie, die Gerade das der Fläche usw. Cavalieris Grundsatz lautet daher: „*continuo sequi indivisibilium proportionem*", d.h. Kontinua stehen in demselben Verhältnis wie die Summen der Indivisibilien. Obwohl er keine systematische Darstellung gegeben hat, lassen sich seine Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

„*Der Flächeninhalt einer ebenen Figur entspricht der Gesamtheit aller zu einer festen Tangente der Figur parallelen Schnitte. Diese Schnitte werden durch „Fließen" eines Schnittes erzeugt. Der fließende Schnitt heißt „regula".*

1. *Zwei Figuren sind flächengleich, wenn ihre Schnitte in gleicher Höhe (über den Tangenten) übereinstimmen.*
2. *Die Gesamtheit der Indivisibilien einer Figur ist unabhängig von der speziellen Wahl der regula.*
1. *Stehen die Indivisibilien zweier Figuren gleicher Höhen immer in einem letzten Verhältnis zueinander, so gilt dies auch für die Flächeninhalte dieser Figuren*."[1]

---

[1] Volkert K.: „Geschichte der Analysis", Seite 65f

Der dritte Punkt wird von ihm auch auf Körper ausgedehnt und ist heute noch unter dem Namen „Prinzip von Cavalieri“ bekannt. Die Unteilbaren einer Figur sind also Segmente, die ihre Endpunkte am Rand der Figur haben. Sie sind parallel zur gegebenen Grundlinie.

Ich möchte diese Methode an einigen <u>Beispielen</u> genauer erläutern:

Ein Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei Dreiecke geteilt. Nun soll mit Hilfe der Indivisibilien gezeigt werden, dass die Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben. Hierzu stellt man fest, dass es zu jedem Indivisibilium (EF) in einem Dreieck ein gleich langes (GH) im zweiten Dreieck gibt:

$$EF = GH$$

Dieses ist jeweils in gleicher Höhe über der entsprechenden Grundlinie AB oder CD. Da somit sämtliche Indivisibilien in den beiden Dreiecken gleich sind, muss auch die Fläche gleich sein. Formal geschrieben bedeutet das:

$$\# \,\square(ABCD) = S_A^D\,(a) = S_A^D\,(x + y) = S_C^B\,(y) + S_A^D\,(x) = 2\,S_A^D\,(x)$$ [2]

(S_A^D ... alle Indivisibilien zwischen A und D, $a = x + y$).

Im zweiten <u>Beispiel</u> soll gezeigt werden, dass das Volumen der Halbkugel gleich dem Volumen eines Zylinders ist, von dem ein Kegel ausgeschnitten wird. Der Radius *r* der Halbkugel ist gleichzeitig der Radius und die Höhe des Zylinders und des Kegels. Die Indivisibilien sind in diesem Fall Flächen, die jeweils in gleicher Höhe *h* über der Grundfläche liegen.

Schnittfläche der Halbkugel in Höhe *h*:
$F_{Halbkugel} = s^2\pi$, wo *s* der Radius der Schnittfläche in Höhe *h* ist. Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz gilt: $s^2 + h^2 = r^2$

$$\Rightarrow F_{Halbkugel} = \left(r^2 - h^2\right)\pi$$

Die Schnittfläche des Zylinders mit dem eingeschriebenen Kegel entspricht einem Kreisring, wobei der äußere Kreis den Radius *r* hat und der innere Kreis den Radius *h* (aufgrund der Gleichseitigkeit des Kegels).

$$\Rightarrow F_{Zylinder\ minus\ Kegel} = r^2\pi - h^2\pi = \left(r^2 - h^2\right)\pi$$

Nach Gesetz 1 müssen nun die Volumina gleich sein, d.h. $V_{Halbkugel} = V_{Zylinder} - V_{Kegel}$.

Cavalieri ist sich allerdings auch bewusst, dass man mit den Indivisibilien vorsichtig umgehen muss. Er entdeckte folgendes Paradoxon:

Wenn man in einem allgemeinen Dreieck die Höhe auf die Basis einzeichnet, findet man zu jedem Indivisibilium (parallel zur Höhe) in der linken Seite ein entsprechendes in der rechten Seite. Die beiden Flächen wären also gleich groß – und das ist unmöglich. Dass die Gesamtheit der Indivisibilien

[2] Volkert K.: „Geschichte der Analysis“, Seite 66

übereinstimmt, reicht also für die Flächengleichheit nicht aus. Einander entsprechende Indivisibilien müssen sich auch auf gleicher Höhe über der Grundlinie befinden (siehe oben, Punkt 1).

Ein weiteres Beispiel, wo die Indivisibilienmethode nicht funktioniert ist folgendes: Gegeben sind zwei konzentrische Kreise, mit $R = 2r$, wobei R und r die beiden Radien bezeichnen. Der Kreis K ist dann die Summe aller Radien, genauso wie k. Nun ist $R = 2r$, also muss dies auch für die Summe aller Radien gelten, d.h. $K = 2k$. Es ist aber $K = 4k$. Hier ist aber ebenfalls Punkt 1 nicht erfüllt, da die Indivisibilien nicht parallel zu einer Tangente sind.

Die Indivisibilien im Kontinuum sind unendlich und brauchen die Bewegung, damit sie überhaupt beschrieben werden können. Dies ist nur in einer fluentistischen Auffassung der Größe möglich. Das Kontinuum wird durch diese Bewegung erzeugt. Es besteht also aus unendlich vielen geometrischen Indivisibilien. Bei Cavalieri ist jedoch nicht klar, ob es außer diesem noch andere gibt. Die Kontinua sind messbar, weil die Unteilbaren vergleichbar sind. Auf der anderen Seite wiederum sind diese vergleichbar, weil jene es sind.

Cavalieri beschäftigt sich auch schon mit der Natur unendlicher Mengen. Sie sind aktual-unendlich, d.h. sie bestehen aus einer unendlichen Anzahl von Elementen, die man sich zumindest im Geist als existierend vorstellen kann. Ähnlichkeiten zum Cantorschen Mengenbegriff (siehe Kapitel 4.3) treten hier zwar noch nicht auf, aber Cavalieri kann durchaus als ein Wegbereiter angesehen werden. Es ist für ihn allerdings nur sinnvoll von einer unendlichen Menge zu sprechen, wenn sie eine charakteristische Darstellungsform besitzt.

3.1.2 Evangelista Torricelli

Torricelli (1608 – 1665) ist der Nachfolger Galileis als „Großherzoglicher Philosoph und Mathematiker". Er führt aber auch das Werk Cavalieris fort und erweitert es. Z. B. lässt er gekrümmte Indivisibilien zu und verwendet sie für spezielle Flächenberechnungen.

Bei der Berechnung der Kreisfläche sind die Indivisibilien die Umfänge konzentrischer Kreise. r sei der Radius des äußeren Kreises und s der Radius eines inneren Kreises. Wegen $r : s = 2r\pi : 2s\pi$ folgt aus der Umkehrung des Strahlensatzes, dass die Enden der abgerollten Umfänge auf einer Geraden liegen. Daraus schließt Torricelli, dass die Fläche des rechtwinkeligen Dreiecks, gleich der Fläche des Kreises ist, also:

$$\mathrm{F}_{\text{Kreis}} = \mathrm{F}_{\text{Dreieck}} = \frac{r \cdot 2r\pi}{2} = r^2\pi$$

Eine enorme Leistung vollbringt Torricelli, indem er das Volumen eines ins Unendliche gehenden Rotationskörpers zwischen zwei festen Punkten $-c$ und $+c$ berechnet. Sein Ausgangspunkt ist dabei die Hyperbel: $x\,y = \frac{1}{2}a^2$, die er um die y-Achse dreht – allerdings nur den Kurventeil im ersten Quadranten. Die gekrümmten zweidimensionalen Indivisibilien sind nun die Mäntel von Zylindern, mit der Fläche $2\pi xy$.

Wegen $x\,y = \frac{1}{2} a^2$ folgt $O = 2\pi \frac{1}{2} a^2 = \pi a^2$.

Das bedeutet, dass die Mäntel aller Zylinder einen konstanten Wert besitzen.
Die Summe der Indivisibilien längs der „regula“ OC wird nun durch Multiplikation der konstanten Oberfläche mit c erhalten:

$$V = \pi a^2 c$$

Das Rotationshyperboloid hat zwar ein endliches Volumen, aber eine unendliche Oberfläche. Dass ein unendlicher Körper ein endliches Volumen haben kann, wird nun nicht mehr als Widerspruch angesehen. Dazu hat wohl auch die Einsicht beigetragen, dass die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

konvergiert. Dies wird z. B. durch eine geschickte Darstellung der Reihenteile sichtbar. Der erste Summand der Reihe füllt das linke Quadrat völlig aus $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, die folgenden Glieder passen aber alle in das rechte Quadrat, das ebenfalls den Flächeninhalt 1 hat. Folglich konvergiert die Reihe gegen die Summe der beiden Quadrate, nämlich 2.

3.1.3 Grégoire de Saint-Vincente

Als dritten Mathematiker, der die Indivisibilienmethode verwendete, möchte ich noch Grégoire de Saint-Vincente (1548 – 1607) anführen. Ihm gelang die Berechnung des Flächeninhalts der gleichseitigen Hyperbel:[3] Diese wird von den beiden Asymptoten 0x und 0y begrenzt. Dazu kommen Flächenstücke, die unten von 0x begrenzt werden, links und rechts von Vertikalen und oben durch eine Hyperbel. Deren Inhalt soll mit $J_{a,b}$ bezeichnet werden, wenn a der Abstand der linken Vertikale von 0y ist und b der rechte Abstand.

Betrachte zuerst $J_{1,2}$ und $J_{2,4}$: Die Intervalle [1, 2] und [2, 4] sollen jeweils in sechs gleiche Teile unterteilt werden, wobei die letzten Intervalle doppelt so breit sind wie die ersten. Nun betrachtet man die Rechtecke in diesen Intervallen und vergleicht sie Stück für Stück. Das erste Rechteck in [1, 2] hat die halbe Breite, aber die doppelte Höhe wie das erste Rechteck in [2, 4], daher sind sie flächengleich. Gleiches gilt für die zweiten Rechtecke in den beiden Intervallen usw. Daraus folgt, dass die Fläche der Rechtecke in [1, 2] die gleiche ist wie die der Rechtecke in [2, 4], also $T_{1,2} = T_{2,4}$, wenn $T_{a,b}$ jeweils die Rechtecksflächen bezeichnet. Lässt man die Anzahl der Rechtecke gegen ∞ gehen, so nähert sich $T_{1,2}$ an $J_{1,2}$, sowie $T_{2,4}$ an $J_{2,4}$, daher $J_{1,2} = J_{2,4}$. Selbiges gilt für $J_{1,2}$ und $J_{3,6}$, wo die Streifen des zweiten Intervalls drei Mal so breit und ein Drittel so hoch sind, wie die des ersten Intervalls. Allgemein gilt daher:

[3] Toeplitz O.: „Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung“, Seite 53ff

$$J_{a,b} = J_{ta,tb} \text{ für } t \in \mathbb{N}.$$

Angenommen *t* ist positiv rational: $t = \frac{p}{q}$

$$J_{\frac{p}{q}a,\frac{p}{q}b} = J_{p\frac{a}{q},p\frac{b}{q}}, \text{ weil } \frac{p}{q}a = p\frac{a}{q}$$

Nun ist $J_{\frac{a}{q},\frac{b}{q}} = J_{p\frac{a}{q},p\frac{b}{q}}$, da es sich um das Intervall $\left[\frac{a}{q},\frac{b}{q}\right]$ handelt und für ganzzahlige *t* die Behauptung schon bewiesen ist. Weiter gilt – nach dem Satz für ganzzahlige *t*:

$$J_{\frac{a}{q},\frac{b}{q}} = J_{q\frac{a}{q},q\frac{b}{q}} = J_{a,b}$$

$$J_{\frac{p}{q}a,\frac{p}{q}b} = J_{a,b}$$

Daraus folgt $J_{a,b} = J_{ta,tb}$ und diese Aussage ist für ganzzahlige und rationale t bewiesen. (Diesen Satz bzw. dessen Folgerung benutzt später auch Leibniz (siehe Kapitel 3.2).)

<u>Folgerung</u>: $J_{a,b} = J_{1,\frac{b}{a}}$, d.h. alle betrachteten Intervalle sind gleich solchen, die bei 1 beginnen, $J_{1,x}$. Speziell gilt für diese: $J_{1,xy} = J_{1,x} + J_{x,xy} = J_{1,x} + J_{1,y}$

$J_{1,x}$ hat die Grundeigenschaft des Logarithmus, d.h. die Fläche ändert sich arithmetisch, wenn x geometrisch fortschreitet.

3.2 Gottfried Wilhelm Leibniz

Leibniz wurde 1646 als Sohn eines „Rechtspflegers“ in Leipzig geboren und starb 1716 in Hannover. Schon früh startete er seine universitäre Laufbahn: Im Alter von 15 Jahren begann er das Studium der Philosophie und Rechtswissenschaften in Leipzig, 1663 erhielt er das Baccalaureat, 1664 den Magister der Philosophie und 1667 promovierte er in den Rechtswissenschaften. Doch sein Interesse galt nicht nur diesen beiden Bereichen. Vielmehr beschäftigte er sich auch mit Physik, Logik, Mathematik, Technik, Sprachphilosophie und Historiographie. Hinsichtlich dieser Bandbreite ist Leibniz mit Aristoteles zu vergleichen. Sein größter Traum bestand in der Gründung der „*scientia generalis*“, einer allgemeinen Wissenschaft. Sie sollte dazu dienen, alle Wissenschaften aus hinreichenden Daten zu erfinden und zu beurteilen. Ursprünglich war die „*scientia generalis*“ als Instrument gedacht um eine Enzyklopädie aufzubauen, in der sämtliches von den Menschen erreichtes Wissen erfasst und geordnet werden sollte. Um dies zu gewährleisten, wollte er eine universelle Zeichenlehre verwenden – die „*characteristica universalis*“ – um Denkkonstruktionen auf ein Zeichensystem abzubilden und Denkprozesse durch Veränderung der Zeichen darzustellen.

Das philosophische System von Leibniz beruht auf folgenden fünf Hauptgedanken[4]:

1. Das Universum ist nach logischen Gesetzen aufgebaut.
2. Im Universum hat jedes Individuum eine selbständige Bedeutung.
3. Alle Dinge sind in vollkommener Harmonie.
4. Das Universum ist quantitativ und qualitativ unendlich.
5. Die Natur kann mechanistisch erklärt werden.

Auf die beiden Bereiche der Mathematik und Philosophie werde ich nun genauer eingehen.

3.2.1 Das Kontinuum

Das Kontinuum wird in der Leibnizschen Mathematik zu einem Grundbegriff. Es ist als fließendes Ganzes gegeben und besteht nicht aus Punkten! Fließend ist es deswegen, weil, wenn man einen beliebigen Punkt herausnimmt, so fallen die anderen Punkte nicht mit diesem zusammen, sind aber auch nicht von ihm getrennt. Der Aufbau aus Punkten ist nicht mehr möglich, „*weil das Ganze seinen Teilen, seien es nun Punkte oder infinitesimale Größen, vorausgeht*."[5] Damit muss Leibniz die Punkte selbst aus einem Teilungsprozess hervorgehen lassen. Das Kontinuum bezeichnet damit die möglichen Teilungen. Somit steht Leibniz´ Kontinuum im krassen Gegensatz zur Dedekind-Cantor-Theorie, die sich das Kontinuum aus Punkten (= letzte Bestandteile) zusammengesetzt denkt. Leibniz formuliert in diesem Zusammenhang auch sein Kontinuitätsprinzip: „*Alles existiert und vollzieht sich in kontinuierlichen, stetigen Übergängen, es gibt keine Sprünge, da weder die Zeit noch die Erscheinungen in der Zeit aus kleinsten Teilchen bestehen*."[6] Mathematisch betrachtet kann es in einem solchen Kontinuum nur stetige Funktionen geben; unstetige Funktionen deswegen nicht, da dazu das Kontinuum aus Punkten bestehen müsste.

Im 19. Jahrhundert wurde die Anschauung eines fließenden Kontinuums aus der Mathematik ausgeschlossen. Kontinuum meint jetzt eine Menge von Punkten und wird zur Grundlage der Analysis. Dadurch entstand die Kritik an den unendlich kleinen Größen, denn gerade durch sie wird die Anschauung eines fließenden Kontinuums in den Kalkül (Infinitesimalrechnung) transportiert.

3.2.2 Das Unendliche

Leibniz übernimmt die Gedanken von Pascal zum Unendlichkeitsbegriff. Dieser postuliert die Teilung jedes Teils der Materie bis ins Unendliche, sowie die unendliche Ausdehnung der Materie. Der Mensch steht in der Mitte zwischen Nichts und All, von beiden ist er unendlich weit entfernt. Pascal meint: „*Alle Dinge kommen aus dem Nichts und gehen zur Unendlichkeit*."[7] Leibniz baut auf diesen

[4] Vgl. Störig H.J.: „Kleine Weltgeschichte der Philosophie", Seite 343
[5] Hecht H.: „G. W. Leibniz: Mathematik und Naturwissenschaft im Paradigma der Metaphysik", Seite 87
[6] Laugwitz: „Zahlen und Kontinuum – eine Einführung in die Infinitesimalmathematik", Seite 10
[7] Pascal: „Allgemeine Erkenntnis des Menschen", übersetzt von Hesse H., Reclam, Leipzig 1881, in: Leibniz G. W.: „Kleine Schriften zur Metaphysik", Seite 375

Grundgedanken auf und entwickelt sie weiter. Zum Thema der Unendlichkeit äußert sich Leibniz hauptsächlich in seinen Briefen. Er meint, dass wir die Idee eines der Vollkommenheit nach Unendlichen besitzen, indem wir das Absolute begreifen (wollen). Es stellt sich dabei aber die Frage, ob wir die Idee eines unendlichen Ganzen oder eines Unendlichen, das aus Teilen zusammengesetzt ist, haben. Letzteres wäre aber kein Absolutes mehr, eben weil es zusammengesetzt ist. Wir können jedoch z. B. verstehen, dass eine Linie immer weiter verlängert werden kann bzw. dass es immer eine größere Linie geben wird als die, die gegeben ist. Trotzdem haben wir keine Idee von einer unendlichen geraden Linie.
In Bezug auf das Unendliche unterscheidet Leibniz drei Grade:

- Der erste und niederste Grad ist das mathematisch Unendliche. Es hat die Bedeutung von größer als jede angebbare Größe.
- Der nächste Grad wäre das Unendliche, das in seiner Gattung das Größte ist, z. B. wäre der Raum das größte Ausgedehnte.
- Den höchsten Grad hat allein Gott.

Für die mathematische Unendlichkeit gibt Leibniz drei verschiedene Erklärungen:

1. Für mathematisch und philosophisch nicht bewanderte Menschen versucht er, das Unendliche durch Größenverhältnisse zu erklären, es ist unvergleichbar. So sind beispielsweise ein Teilchen der magnetischen Materie und ein Sandkorn, dieses mit der Erde und diese mit dem Firmament nicht vergleichbar.
2. Für Mathematiker gibt er folgende Erläuterung (in Bezug auf die Infinitesimalen): Das Kalkül zeigt, dass der bei Anwendung der Infinitesimalrechnung auftretende Fehler kleiner als jede angebbare Größe ist. Daher kann man es (das unendlich Kleine) ganz unbedenklich als „idealen Begriff“ verwenden, ungeachtet dessen, dass man keine metaphysische Strenge hat und es nicht als reelles Ding ansieht. Diese idealen Begriffe kürzen die Rechnung ab. Leibniz vergleicht sie mit den komplexen Zahlen: Sie sind wie die unendlich kleinen Zahlen eine Fiktion des Geistes, aber nützlich.
1. Für die Philosophen gibt er die eigentliche Begründung der Infinitesimalmathematik: Die Infinitesimalen haben ihr „fundamentum in re“. Sie werden aus Leibniz´ allgemeinen Kontinuitätsprinzip abgeleitet. Es existiert nämlich eine Wechselbeziehung zwischen dem Ideellen und dem Realen. Daraus folgt, dass die Regeln des Endlichen im Unendlichen Geltung behalten, „*wie wenn es Atome – d.h. Elemente der Natur von angebbarer fester Größe gebe, obgleich dies wegen der unbeschränkten, wirklichen Teilung der Materie nicht der Fall ist, und umgekehrt gelten die Regeln des Unendlichen für das Endliche, wie wenn es das metaphysische Unendliche gäbe, obwohl man ihrer in Wirklichkeit nicht bedarf, und die Teilung der Materie niemals zu solchen unendlich kleinen Stücken gelangt. Denn alles untersteht der Herrschaft der Vernunft, und es gäbe sonst weder Wissenschaft noch Gesetz, was der Natur des obersten Prinzips widerstreiten würde*.“[8]

[8] derselbe, Seite 204f

Leibniz gibt auch explizit drei Bedeutungen von unendlich kleinen Größen (Differenzialen) an:

1. Unendlich klein als „vernachlässigbar“: Dies kann man einerseits in physikalischem Sinn auffassen, z. B. ist die Erde im Vergleich zum Universum ein winziger Punkt; eine Kugel, die man in der Hand halten kann, ist im Vergleich zur Erde ein Punkt. Das Universum ist also im Vergleich zu dieser Kugel unendlich-unendlich größer. Andererseits kann man es auch „nicht-archimedisch“ auffassen, was zur Nonstandard-Analysis führen würde (siehe Kapitel 4.4.2).
2. Unendlich klein als gegen Null konvergent.
3. Die unendlich kleinen Größen werden algebraisch gleich Null gesetzt, geometrisch haben sie jedoch ein Verhältnis. Dies griff Euler in den „*Institutiones calculi differentialis*“ wieder auf (siehe Kapitel 3.5).

3.2.3 Mathematische Leistungen

Eine der größten Errungenschaften für die Mathematik war die Entwicklung des Infinitesimalkalküls. Leibniz „entdeckt“ die Infinitesimalrechnung zwischen 1672 und 1676 während eines diplomatischen Aufenthaltes in Paris. Anregungen dafür erhält Leibniz von Blaise Pascal und der Indivisibilienmethode von Cavalieri. Ein ausschlaggebender Punkt in allen Werken ist die Bezeichnung, da geschickt gesetzte Symbole nach der Meinung von Leibniz die Erkenntnis erleichtern: „*Bei den Bezeichnungen ist darauf zu achten, daß sie für das Erfinden bequem sind. [...] So wird nämlich auf wunderbare Weise die Denkarbeit vermindert*.“[9]

Ausgangspunkt sind allerdings seine Untersuchungen und Ergebnisse zu <u>Differenzenreihen</u>:
Die Summe einer Differenzenreihe wird nach Leibniz folgendermaßen berechnet:

Gegeben seien Reihenglieder $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ und die Differenzenreihe

$$b_0 = a_1 - a_0, b_1 = a_2 - a_1, \ldots, b_{n-1} = a_n - a_{n-1}.$$

Wegen der Identität $a_0 - a_0 + a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \cdots + a_n - a_n = 0$ folgt

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} = a_n - a_0$$

Daraus ergibt sich der Hauptsatz über die Summierung von Gliedern einer Differenzenreihe: Hat man aufsteigende Größen und bildet man die (positiven) Differenzen dieser Größen, so ist die Summe der Differenzen gleich dem letzten Glied minus dem ersten Glied.
<u>Beispiel – Quadratzahlen</u>:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & & 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & a_i \\ & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & & b_i \end{array}$$

1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 – 0 = 25

Leibniz bildet jedoch nicht nur erste, sondern auch zweite und dritte Differenzen. Aus diesen Überlegungen folgert er, dass man die Summe jeder gesetzmäßig

[9] Leibniz G. W.: „Analysis des Unendlichen“, Seite 74, in einem Brief an Tschirnhaus 1678

aufgebauten Reihe berechnen kann. Dies wäre auch möglich, wenn es unendlich viele Glieder gebe, solange ein endlicher „Grenzwert“ existiert. Dieselbe Methode wird nun auf unendliche Reihen übertragen, mit dem allgemeinen Ergebnis: $\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}+\cdots=\frac{1}{t-1}$

<u>Beispiel</u>: t = 3:

$$\underbrace{1+\frac{1}{3}}_{2/3}\underbrace{+\frac{1}{9}}_{2/9}\underbrace{+\frac{1}{27}}_{2/27}\underbrace{+\frac{1}{81}}_{2/81}+\cdots$$

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\cdots = 1-0=1$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{3}{2}$$

Die Ergebnisse der Reihen waren zwar schon vorher bekannt, aber die Methode war neu. Die Erkenntnis von Leibniz ist also, dass man mit Hilfe der Beziehung $b^n - b^{n-1} = b^n(1-b)$ aus der geometrischen Reihe durch Bildung der Differenzen eine proportionale Reihe zur ursprünglichen erhält.

Ein wertvolles Einzelergebnis dieser Untersuchungen ist der so genannte <u>Transmutationssatz</u> im Herbst 1673:

Die Transmutation ist ein geometrisches Verfahren, mit deren Hilfe sämtliche bisher gewonnenen Sätze über Quadraturen hergeleitet werden können. Zu diesem Satz gelangt Leibniz durch das so genannte „charakteristische Dreieck“[10], angeregt von Pascal. Dieser stützt sich auf die Methode des Archimedes (siehe Kapitel 2.6). Pascal wollte das Moment des Viertelkreisbogens $\int_0^{\frac{a\pi}{2}} y$ ds bestimmen und benutzte dazu die Ähnlichkeit der Dreiecke mit den Seiten *dx*, *dy*, *ds* bzw. *y*, *a – x, a*: $\frac{ds}{a}=\frac{dx}{y}$

Daraus folgt: $\int_0^{\frac{a\pi}{2}} yds = \int_0^a adx = a^2$

Leibniz schreibt dazu: „*Ich prüfte dessen* [Pascals, Anmerkung] *Beweis für die Kugeloberfläche, und mir kam ein Licht, welches der Verfasser nicht gesehen hatte*.“[11] Die Ähnlichkeit der Dreiecke bleibt erhalten, wenn die Seitenlängen des Dreiecks *dx*, *dy*, *ds* gegen Null gehen, d.h. infinitesimal werden. Leibniz erkennt die Verallgemeinerungsfähigkeit auf sämtliche Kurven, wenn der Radius durch die Kurvennormale ersetzt wird. Nun ist es möglich, die infinitesimalen Verhältnisse auch an ähnlichen, endlichen Dreiecken abzulesen. Für Leibniz gilt dies als strenge Begründung des unendlich Kleinen. Damit ist die Indivisibilienmethode überwunden.

[10] Das charakteristische Dreieck bezeichnet Leibniz als triangulum characteristicum inassignabile, das dazu ähnliche Dreieck heißt triangulum characteristicum assignable.

[11] Cantor M.: „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“, Band 3, Seite 162

Der Transmutationssatz beruht ebenfalls auf Ähnlichkeitsbetrachtungen zwischen Dreiecken. Gegeben ist ein glatter Kurvenbogen mit einem laufenden Punkt P(*x*,*y*) in einem schiefwinkeligen Parallelkoordinatensystem. Der Grundgedanke beruht darauf, ebene Figuren durch Dreiecke mit infinitesimalen Winkeln zu erzeugen. Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks wird von Leibniz durch Bildung der Differenz der Flächeninhalte A_{0SQ} und A_{0SP} gewonnen. Schließlich gelangt er zu der Annahme, dass die Fläche zwischen der *x*-Achse und der Kurve gleich der Summe von infinitesimalen Dreiecken und dem Dreieck $0\,A^*$ Q ist.

Es gilt: Δ PRQ ≈ Δ 0ST, da 0S ⊥ PQ und ∠ 0TS = ∠ PQR.

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{h} = \frac{\Delta s}{z}$$

$$\Rightarrow z\,\Delta x = h\,\Delta s$$

$$A_{\Delta 0PQ} = \frac{h\Delta s}{2} = \frac{z\Delta x}{2}$$

Daraus folgt: $A_{Segment} = \sum A_{\Delta 0PQ} = \frac{1}{2}\sum z\Delta x$

$$\Rightarrow A_{0PQA*} = A_{Segment} + A_{\Delta 0A*Q} = \frac{1}{2}\left(\sum z\Delta x\right) + \frac{1}{2}xy$$

Aus dem laufenden Punkt P (*x*, *y*) ergibt sich die Veränderliche *z* (resacta): $z = y - x\frac{dy}{dx}$, wobei *y* die Kurve bezeichnet.

$$\Rightarrow \int ydx = A_{0PQA*} = A_{Segment} + A_{\Delta 0A*Q} = \frac{1}{2}\int zdx + \frac{1}{2}xy$$

Dies ist der Transmutationssatz.

Dieselbe Methode benutzt Leibniz z. B. zur <u>arithmetischen Quadratur des Kreises</u>[12]:
Hier benutzt er ein rechtwinkeliges Koordinatensystem. Der Punkt B(*x*, *y*) „wandert" auf dem Halbkreisbogen $y = \sqrt{2ax - x^2}$, wodurch er *z* als Länge der Tangente T0 = TB (ohne Rechnung) erhält.
Kreisgleichung: $y^2 + x^2 - 2ax = 0$

Aus der Grafik ergeben sich folgende Äquivalenzen:

(*) $\frac{z}{a} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a - x}$, somit $\left(\frac{z}{a}\right)^2 = \frac{x}{2a - x}$

$$\Rightarrow x = \frac{2az^2}{a^2 + z^2} \text{ und } y = \frac{2a^2 z}{a^2 + z^2}$$

Die Fläche des Dreiecks 0BM beträgt $\frac{1}{2}ay$. Wegen (*) gilt:

$$\frac{1}{2}ay = \frac{1}{2}z(2a - x) \text{ und } \int_0^x zdx = xz - \int_0^z xdz .$$

[12] vgl. Hecht H.: „G. W. Leibniz: Mathematik und Naturwissenschaft im Paradigma der Metaphysik", Seite 38f

Nach dem Transmutationssatz gilt nun: A $_{M0B}$ = A $_{0BM}$ + A $_{0TB0}$, d.h.

$$A_{M0B} = \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}\int_0^x zdx = \frac{1}{2}z(2a-x) + \frac{1}{2}\left(xz - \int_0^z xdz\right) = az - \int_0^z \frac{az^2}{a^2+z^2}dz$$

Dieses Integral wird nun durch Reihenentwicklung berechnet:

$$A_{M0B} = az - \frac{z^3}{3a} + \frac{z^5}{5a^3} - \frac{z^7}{7a^5} + \cdots$$

Insbesondere ergibt sich hier für *z* = *a* die Leibnizreihe: $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$

Damit stützt sich die Infinitesimalrechung von Leibniz also auf die arithmetische Betrachtung von Differenzen und auf die geometrische Betrachtung des charakteristischen Dreiecks.

Im Spätherbst des Jahres 1675 erfindet Leibniz durch das „inverse Tangentenproblem", das ist die Bestimmung der Kurve durch die gegebene Tangente, den „Calculus". Für die neue Operation wurde am 29. Oktober 1675 ein neues Symbol - $\int$ - festgelegt, anstatt des ursprünglichen omn. (omnes = alles)[13]. Eine Eigenschaft dieser Operation ist, dass die Dimension um einen Grad erhöht wird. Die Umkehroperation wird durch $y = \frac{z}{d}$ festgelegt, falls die ursprüngliche Operation durch $\int y = z$ gegeben ist. Die „*d* – Operation" vermindert also die Dimension um einen Grad. Verwendet er anfangs noch Ausdrücke wie $\frac{x}{d}$ um die „Differenz" auszudrücken, findet sich am 11. November 1675 *dx* statt $\frac{x}{d}$. *dx* soll die Differenz zweier nächstliegender *x*-Werte bezeichnen. Etwas später kommt auch *dy* vor und damit ist die (auch heute noch gültige) Schreibweise gebildet, z. B.: $\int ydy = \frac{y^2}{2}$. Durch die Anwendung des neu gewonnenen Formalismus auf seinen Transmutationssatz erhält Leibniz die bereits untersuchten Quadraturen in einem einheitlichen Lösungsverfahren. Da sämtliche Integralkurven im Ursprung beginnen, gibt es bei ihm allerdings noch keine Integrationskonstanten. Kann die Kurve durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden, so ist die Quadratur arithmetisch (siehe Quadratur des Kreises, Seite 36).

<u>Beispiel</u>: Schneidet man die Tangente in P (*x*, *y*) mit der *y*-Achse und halbiert die Strecke auf dieser Achse, so folgt: A $_{0PQ}$ = A $_{\Delta 0RP}$. Die Punkte T und Q haben dann die Koordinaten T $\left(0, y - x\frac{dy}{dx}\right)$ und Q $\left(x, \frac{ydx - xdy}{2dx}\right)$.

---

[13] Leibniz schreibt hier: „Utile erit scribi $\int$ pro omn. ut $\int l$ pro omn. *l* id est summa ipsorum *l*." [Es wird nützlich sein $\int$ statt omnia zu schreiben, um die Summe einer Gesamtheit zu bezeichnen.] in: Cantor M.: „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", Band 3, Seite 166

$$A_{0PQ} = \int_0^x \left(y - \frac{ydx - xdy}{2dx} \right) dx$$

Anwendung des Transmutationssatzes ergibt:

$$A_{\text{Segment OP}} = \frac{1}{2} \int tdx = \int \frac{t}{2} dx = A_{0QR}$$

$$A_{\text{Sektor 0RP}} = A_{\text{Segment OP}} + A_{\Delta 0RP} = A_{0PQ} + A_{0QR}$$

$$\Rightarrow A_{\Delta 0RP} = A_{0PQ}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} xy = \int_0^x \left(y - \frac{ydx - xdy}{2dx} \right) dx = \int_0^x \frac{ydx + xdy}{2} dx$$

Hier ist ansatzweise auch schon die Produktregel erkennbar, die Leibniz aber erst 1677 entdeckt: $d(xy) = xdy + ydx$
Der <u>Beweis</u> erfolgt leicht mittels Infinitesimalen:
$d(xy) = (x + dy)\,(y + dy) - xy = ydx + xdy + dxdy$. $dxdy$ wird hier vernachlässigt, da es gegenüber dem Rest unendlich klein ist.

1684 wird zum ersten Mal die „Neue Methode“ von Leibniz in den Acta Eruditorum unter dem Titel „*Neue Methode der Maxima, Minima sowie der Tangenten, die sich weder an gebrochenen, noch an irrationalen Grössen stösst, und eine eigentümliche darauf bezügliche Rechnungsart*“ veröffentlicht. Den Anfang möchte ich hier kurz wiedergeben:

Gegeben sei eine Achse AX und eine Kurve. Die Normale auf die Achse heiße v und AX heiße x. t_1, t_2 seien Tangenten an die Kurve und T_1, T_2 die Schnittpunkte mit der (y-)Achse. Nun kann man nach Belieben eine Strecke dx wählen. Jene Strecke, die sich zu dx wie v zu XT_1 verhält, heiße dv (Differenz der v, heute Differenzial). Leibniz vernachlässigt hier allerdings die Vorzeichen der Strecken XT_1 bzw. XT_2. Diesen Fehler kann man aber leicht beheben:

Sei y die Ordinate und S = DX die Subtangente mit richtigem Vorzeichen, dann ergibt sich $dy = \frac{y}{s} dx$. DX ist positiv (bzw. negativ), wenn der Übergang von D nach X in Richtung der wachsenden (bzw. fallenden) x erfolgt.

Darauf folgen einige Rechenregeln für die infinitesimalen Größen, wobei Leibniz keinerlei Beweise angibt, da sie seiner Meinung nach offensichtlich sind:

- Sei a konstant, dann wird $da = 0$ und $d(ax) = adx$.
- Sind y und v zwei Kurven mit denselben Funktionswerten, dann ist $dy = dv$.
- Addition und Subtraktion: $z - y + w + x$ wird zu $d(z - y + w + x) = dz - dy + dw + dx$
- Multiplikation: $d(xv) = x\,dv + v\,dx$
- Division: $d\frac{v}{y} = \frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$. Leibniz hätte auch bei der Multiplikation doppelte Vorzeichen verwenden müssen. Da die Subtangente aber ohne Vorzeichen angenommen wird, fehlen diese hier.

- Potenzen und Wurzeln: $dx^a = a\, x^{a-1}\, dx$ und $d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b} dx \sqrt[b]{x^{a-b}}$

Wenn es um Tangenten geht, beachtet Leibniz sehr wohl die Vorzeichen. Betrachtet man die Entwicklung der Werte *dz*, so kann diese entweder positiv oder negativ sein. Ist sie negativ, wird die Tangente in die entgegengesetzte Richtung gezogen. Im Falle $\frac{dv}{dx} = \infty$ steht die Tangente normal auf die Achse. Wie man eine Tangente findet, beschreibt Leibniz so: *„..., daß eine Tangente zu finden so viel ist wie eine Gerade zeichnen, die zwei Kurvenpunkte mit unendlich kleiner Entfernung verbindet,...*“[14] Diese unendlich kleine Entfernung kann man immer durch ein bekanntes Differenzial oder eine bekannte Tangente ausdrücken.

Wichtig ist noch anzumerken, dass für Leibniz sämtliche Kurven bzw. Funktionen differenzierbar sind. Er kommt zu dieser Behauptung, indem er annimmt, dass jede Kurve aus unendlicheckigen Polygonen besteht. Ableiten bedeutet nun nur, die Strecken der Polygone zu Tangenten zu verlängern. In einem Aufsatz aus dem Jahr 1692 führt Leibniz zwar die Begriffe „*differentiabilis*“ und „*indifferentiabilis*“ ein, doch haben diese nicht die heutige Bedeutung. Sie werden vielmehr als „variabel“ (differentiabilis) und „konstant“ (indifferentiabilis) aufgefasst.

Im Jahr 1693 formuliert Leibniz – ebenfalls in den Acta Eruditorum – den Satz, dass man $\int_a^b f(x)dx$ angeben kann, wenn man eine Funktion F(*x*) kennt, die *f(x)* als Ableitung hat, also eine Form des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung.

Der <u>Beweis</u> kann folgendermaßen gegeben werden:
$\int_a^b \frac{dy}{dx}dx = \int_a^b dy = y(b) - y(a)$. Die letzte Schreibweise, also *y*(*b*) – *y*(*a*), wird aus der eingangs gegebenen Erklärung für die Summierung von Differenzen klar.

Wie oben schon erwähnt, beschäftigt sich Leibniz auch mit der Summation von Reihen. Einige Entwicklungen möchte ich hier anführen, aus: „*Neue Methode, wie man Reihen leichter entwickeln kann, auch wenn sie z. B. in einer Integral- oder Differentialformel gegeben sind*“: Das Neue daran ist, dass man die gesuchte Reihe als gefunden annimmt und die Koeffizienten bestimmt.
<u>Beispiel</u>: Gegeben ist der Numerus $\frac{a+x}{a}$, gesucht der Logarithmus
Der Logarithmus ist wegen der „Quadratur der Hyperbel“ (siehe Kapitel 3.1.3):

$$y = \int \frac{a}{a+x} dx$$

$$\Rightarrow dy = \frac{adx}{a+x}, \quad \frac{ady}{dx} + \frac{xdy}{dx} - a = 0$$

Um den Logarithmus zu erhalten, setzt man:

$$y = bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 \text{ usw.}$$

[14] Leibniz G. W.: „Analysis des Unendlichen“, Seite 7

$$\frac{dy}{dx} = b + 2cx + 3ex^2 + 4fx^3 \text{ usw. und}$$
$$\frac{ady}{dx} = ab + 2acx + 3aex^2 + 4afx^3 \text{ usw.}$$
$$+\frac{xdy}{dx} = \quad bx + 2cx^2 + 3ex^3 \text{ usw.}$$
$$-a = -a$$

Die linke und rechte Seite ergibt jeweils Null. Damit sich in der entwickelten Gleichung alle Glieder aufheben, setzt man:

$$ab - a = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$
$$2ac + b = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{2a}$$
$$3ae + 2c = 0 \Rightarrow \quad e = \frac{1}{3a^2}$$
$$4af + 3e = 0 \Rightarrow \quad f = -\frac{1}{4a^3} \text{ usw.}$$
$$\Rightarrow y = x - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3} + \text{usw.}$$

Auch die unendliche harmonische Reihe erregt seine Aufmerksamkeit. Sie kann nach Leibniz nicht summiert werden, aber es ist dennoch möglich die Differenz zweier harmonischer Reihen zu bestimmen: „*Und obgleich die harmonische Reihe mit einer unendlichen Gliederzahl auch der Größe nach unendlich ist und daher nicht summiert werden kann [...], so kann die Differenz zweier Reihen harmonischer Progression, mögen sie auch unendlich sein, doch eine endliche Größe bilden*.“[15]

Beispiel:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \cdots = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 - 1} = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k+1} =$$
$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \cdots\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

Die Divergenz der harmonischen Reihe kann aus heutiger Sicht leicht gezeigt werden[16]:
S bezeichne die harmonische Reihe:

$$\mathrm{S} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \cdots$$

Nun erzeugt man eine neue Reihe S', indem in den zusammengefassten Gruppen jedes Glied durch das jeweils letzte ersetzt wird:

$$\mathrm{S}' = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots$$

---

[15] Leibniz G. W.: „Analysis des Unendlichen“, Seite 50
[16] vgl. Maor E.: „Dem Unendlichen auf der Spur“, Seite 274f

In dieser Reihe ist nun jedes Glied kleiner oder gleich dem der vorherigen Reihe, z. B. $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{8} < \frac{1}{5}$. Daraus folgt, dass jede Partialsumme von S´ kleiner als die entsprechende Partialsumme von S ist. Sind S_n und S'_n jeweils die ersten n Partialsummen von S und S', so gilt: $S_n > S'_n$. Jede zusammengefasste Gruppe in S'_n hat die Summe $\frac{1}{2}$, daher kann man S' folgendermaßen darstellen:

$$S' = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

Da diese Reihe offensichtlich divergiert, muss auch die ursprüngliche Reihe S divergieren.

□

Leibniz führt auch Konvergenz- und Divergenzbetrachtungen durch, um seine Ergebnisse zu sichern. Den Beweis der Konvergenz der geometrischen Reihe, die bis ins Unendliche abnimmt, führt er z. B. anhand dieser Figur[17]:

Er konstruiert eine Punktfolge, so dass $A_1B_1 : A_2B_2 = A_2B_2 : A_3B_3 = ...$, C wird bestimmt durch $A_1B_1 : A_1C = A_2B_2 : A_2C$.
Nun wird gezeigt, dass die Strecke A_1C nicht kleiner als die Summe A_1A_2, A_2A_3, ... wird bzw. A_1C nicht größer als dieselbe wird. „*Folglich, wenn jemand sagen würde, die Punkte A, wenn schon bis ins Unendliche fortgesetzt, gingen doch nie in C über, so werden sie trotzdem von C nur um einen unendlich kleinen Zwischenraum entfernt sein, oder der Fehler wird kleiner als jeder beliebige angebbare Fehler*."[18]

Weiters formuliert Leibniz ein Konvergenzkriterium für alternierende abnehmende Reihen:
„*Wenn eine Größe a einer unendlichen Reihe b – c + d – e + f – g ± … gleich ist, so ist b, b – c + d, … größer als a, und der Überschuß beträgt weniger als c, als e …; dagegen ist b – c, b – c + d – e, … kleiner als a, und der Mangel beträgt weniger als d, als f …*"[19]

<u>Anwendungsbeispiel</u>:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

1. Glied	$1 > \frac{\pi}{4}$	Fehler < $\frac{1}{3}$
Summe der ersten zwei Glieder	$1 - \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$	Fehler < $\frac{1}{5}$
Summe der ersten drei Glieder	$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} > \frac{\pi}{4}$	Fehler < $\frac{1}{7}$

[17] vgl. Dunzendorfer A.: „Über das mathematische Werk von Gottfried Wilhelm Leibniz", Seite 19
[18] derselbe, Seite 19, zitiert nach Hofmann/Wieleitner/Mahnke, Seite 597f
[19] derselbe, Seite 22

Dieses Konvergenzkriterium lässt sich so formulieren: Eine alternierende Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$ konvergiert genau dann, wenn die Folge a_n monoton fällt und gegen Null strebt.

Das mathematische Werk von Leibniz wurde vor allem von den Gebrüdern Jakob und Johann Bernoulli weitergeführt und vertieft. Sie verknüpften physikalische Fragestellungen mit mathematischen Methoden.

3.2.4 Philosophie – insbesondere Monadologie

Das zentrale Thema der Leibnizschen Philosophie ist das Problem der Wechselwirkung zwischen Sein und Einheit in Bezug auf den Logos. Alles, was wirklich ist, muss eines sein. Das, was eines ist, hat Einheit in numerischem Sinn und ist Einheit in metaphysischem Sinn (d.h. als Monade, die allem Seienden als unteilbares, tätiges, geistiges Prinzip zugrunde liegt).

Die Monaden (von griech. μοναζ, Einheit, das Einfache, Unteilbare) oder individuelle/einfache Substanzen benötigt Leibniz ursprünglich um in seinem Werk „*Meditationes de cognitione veritatis et ideis*“ (Betrachtungen über die Erkenntnis, die Wahrheit und die Ideen) aus dem Jahre 1684 einen Ansatz zu haben, der es ermöglicht, das Wissen seiner Zeit zu integrieren. Damit sollte es möglich sein, die Leistungen seiner Vorgänger darzulegen, ohne sie als falsch abzuweisen. Die Monade sollte also als metaphysische Verankerung allen Wissens dienen.

Mit der Monadentheorie versucht Leibniz eine Verbindung zwischen Aristotelischem und neuzeitlich-mechanischem Materiebegriff herzustellen. Dazu deutet er materielle Körper als Erscheinungsformen von Aggregaten ausdehnungsloser Monaden. Diese sind in einem Kontinuum von wachsender Komplexität angeordnet. Außerdem versucht er eine neue

Bestimmung des Substanzbegriffes – anschließend an Aristoteles. Monaden sind unteilbare, unzerstörbare bzw. einfache körperliche Substanzen, die nicht in Wechselwirkung mit der Außenwelt stehen. Sie können weder erzeugt noch vernichtet werden (außer von Gott), da sie keine Teile haben. Die Monaden unterscheiden sich qualitativ durch vollkommene Selbsttätigkeit – als Differenz der Entwicklung ihrer inneren Zustände. Sie haben selbstschöpferische Tätigkeit oder metaphysische Aktivität, d.h. die ganze Wirklichkeit/Mannigfaltigkeit wird durch sie hervorgebracht. Dies ist das eigentliche Kennzeichen des Leibnizschen Substanzbegriffes. Durch die metaphysische Realität wird jede Monade zum „Spiegel Gottes“ bzw. des ganzen Universums. Alle Monaden spiegeln sich auch gegenseitig, wobei diese Spiegelungen durch (mathematische) Proportionalitäten (von Gott) geregelt sind. So schreibt Leibniz: „*Die Essenz der Substanz [Monade] besteht in der einfachen Kraft der Tätigkeit oder im Gesetz der Folge der Wechsel, so wie die Natur der Reihe in den Zahlen besteht*.“[20] Und „*Man kann sogar sagen, daß jede Substanz [Monade] in gewisser Weise das Gepräge der unendlichen Weisheit und der Allmacht Gottes trägt und ihn nachahmt, soweit sie dazu fähig ist*.“[21]

[20] Hecht H.: „G. W. Leibniz: Mathematik und Naturwissenschaft im Paradigma der Metaphysik“, Seite 95
[21] Leibniz G. W.: „Kleine Schriften zur Metaphysik“, Seite 79

Jede Monade kann man unter vier Gesichtspunkten betrachten:

1. Monaden sind Punkte, d.h. der Urgrund des Seins sind punktförmige Substanzen und kein Kontinuum
2. Monaden sind Kräfte bzw. Kraftzentren, d.h. ein Körper ist ein Komplex von punktuellen Kraftzentren.
3. Monaden sind Seelen, d.h. die punktuellen Ursubstanzen sind in verschiedenem Grad beseelt. Die niederen Monaden haben nur unbewusste Vorstellungen, die höheren, wie z. B. die Menschenseele, haben Bewusstsein. Unendliches Bewusstsein hat nur Gott.
4. Monaden sind Individuen: es gibt keine zwei gleiche Monaden, denn jede spiegelt das Universum auf ihre Art wieder.

Zwischen den Monaden, insbesondere zwischen Körper und Geist jedes einzelnen Wesens, besteht „prästabilierte (von Gott im Voraus angelegte) Harmonie" – sie gewährt den Zusammenhang zwischen diesen. Sie wurde von Gott geschaffen. Jede Monade folgt ihren eigenen Gesetzen, die sie mit ihrer Schöpfung erhalten hat. Trotzdem stimmen die Monaden überein, „*ganz so als gäbe es einen wechselseitigen Einfluss oder als hätte Gott über seine allgemeine Mitwirkung hinaus immer die Hand im Spiel*."[22] Die prästabilierte Harmonie fasst alles Viele zu einer Einheit zusammen. Mit Hilfe der Monaden und der prästabilierten Harmonie erklärt Leibniz z. B. die Erkenntnis oder Erscheinungen der Außenwelt.

Die Ansicht über die prästabilierte Harmonie verdeutlicht Leibniz mit dem sogenannten Uhrengleichnis: Man denke sich zwei Uhren, die ohne die geringste Abweichung übereinstimmen. Diese Übereinstimmung kann auf drei verschiedenen Arten bestimmt werden:

1. Die beiden Uhrwerke sind mechanisch miteinander verbunden, so dass die eine Uhr von der anderen mechanisch abhängig ist und daher keine Abweichung hervorgerufen werden kann.
2. Ein Mechaniker überwacht rund um die Uhr die beiden Uhren und reguliert sie.
3. Die Uhren sind so präzise angefertigt, dass keine Abweichung möglich ist.

Dies bedeutet nun für die Substanzen folgendes: Die erste Möglichkeit scheidet aus, da jede Monade von der anderen unabhängig ist. Genauso ist es auch mit der zweiten Möglichkeit. Der Mechaniker kann hier mit Gott gleichgesetzt werden, aber Gott greift nicht direkt auf die Monaden ein. Also bleibt nur noch die dritte Möglichkeit. Gott hat die Monaden so „präzise" geschaffen, dass eben keine Abweichung möglich ist, d.h. jede Monade erfüllt ihre Aufgabe.

3.3 Sir Isaac Newton

Isaac Newton wurde am 25. Dezember 1642 in Woolsthorpe geboren und starb im hohen Alter von 85 Jahren. 1661 begann er das Studium der Mathematik am Trinity College in Cambridge, wo er 1665 den B.A. (Bachelor of Arts) erhielt und 1668 den M.A. (Master of Arts). 1669 – 1701 übernahm er die Professur seines Lehrers Isaac Barrow als Lucasian Professor der Mathematik in Cambridge. 1672

[22] derselbe, Seite 241

wurde er Mitglied der Royal Society, 1703 auch deren Präsident. Im Jahre 1705 wird Newton von Königin Anna zum Ritter geschlagen. Alexander Pope zeigt, wie er zu seiner Zeit gesehen wurde:

„*Nature, and Nature´s Laws lay hid in Night.*
God said, let Newton be and all was Light."[23]

Neben der Mathematik beschäftigt sich Newton auch mit der Astronomie, Physik und Theologie (vor allem Prophetie). Seine mathematischen Leistungen fallen in verschiedene Gebiete, wie Analysis, Algebra, Zahlentheorie, synthetische und analytische Geometrie sowie Interpolationsverfahren. Dabei schöpft er sein „gesamtes Wissen" aus dem Werk „*Géométrie*" von René Descartes (1596 – 1650) und „*Arithmetica infinitorum*" (Arithmetik des Unendlichen) von John Wallis (1616 – 1703). Das vielleicht wichtigste Werk Newtons sind die „*Principia*" (der volle Titel lautet: „*Philosophia naturalis principia mathematica*"). In diesem Werk wurde zum ersten Mal irdische Mechanik und Himmelsmechanik vereint. Es ist in drei Abschnitte unterteilt. Der erste behandelt die Anwendung der Mathematik auf Bewegungen von Körpern im leeren Raum. Das mathematische Hilfsmittel dafür sind Sätze über Grenzwerte von Verhältnissen – in heutiger Terminologie Differenzialquotienten. Der zweite Abschnitt behandelt die Mathematik in Widerstand erzeugenden Medien. Das dritte Buch wendet dann die Ergebnisse des ersten Buches auf die Kosmologie (Planetentheorie) an. Interessant ist, dass Newton, obwohl er die Fluxionsrechnung schon entwickelt hatte, diese nicht in den „*Principia*" verwendet.

Bemerkenswert ist, dass Newton, in Gegensatz zu Descartes etwa, an der Antike festhält. So glaubt er beispielsweise an den Mythos, dass Pythagoras die Elemente seiner Weisheit von „Moschus" – ein anderer Name für Moses – erhalten hat. Daher müssen in der pythagoreischen Tradition noch Elemente der uralten Weisheit enthalten sein. Dies drückt sich auch im Verhältnis zwischen Arithmetik und Geometrie aus, wie er in einem Anhang zur „*Arithmetica Universalis*" 1707 schreibt: „*Folglich sollten diese beiden Wissenschaften [Arithmetik und Geometrie] nicht vermischt werden. Die Alten waren so sehr darauf bedacht, die eine von der anderen getrennt zu halten, daß sie niemals arithmetische Begriffe in die Geometrie einbrachten, während die Neueren dadurch, daß sie beide vermischen, die Einfachheit verloren haben, auf der die ganze Eleganz der Geometrie beruht*."[24]

3.3.1 Raum & Zeit

Der Raum ist durch sehr feinen Äther erfüllt. Dieser ist eine Art elastische Flüssigkeit, die sich nicht nur im leeren Raum befindet, sondern auch Poren von Kristallen, Glas oder Wasser durchdringt. Newton postuliert – im Gegensatz zu Leibniz – absoluten Raum und absolute Zeit. Beide haben keine Beziehung zu einem äußeren Gegenstand. Bei der Einführung dieser Begriffe hatte er – nach einigen Historikern – theologische Motive. Raum und Zeit sind Bereiche, wo Gott mit Hilfe einer spirituellen Wirkung eingreift. Daher möchte er diesen beiden

[23] Fauvel J.: „Newtons Werk: die Begründung der modernen Naturwissenschaften", Birkhäuser, Basel, 1993, Seite 8
[24] Zitiert nach „Spektrum der Wissenschaft", Biographie von Isaac Newton, Heft 1/1999, Seite 47

Größen eine Absolutheit zuschreiben. Der Begriff des absoluten Raumes selbst bezeichnet räumliche Strukturen, die materiellen Ereignissen oder Vorgängen zugrunde liegen. Bei Newton gibt der absolute Raum ein ruhendes Bezugssystem an, wo Koordinaten absolute Orte und Abstände bezeichnen. Er ist mit einer inneren Struktur ausgestattet. Diese ist grundlegender als die Beziehungen zwischen Ereignissen und wird von diesen nicht beeinflusst. Einstein eliminiert später in seiner allgemeinen Relativitätstheorie den absoluten Raum und die absolute Zeit. Sie werden durch eine Klasse äquivalenter Inertialsysteme ersetzt.

Was bei Leibniz die prästabilierte Harmonie ist, drückt sich in gewisser Art und Weise auch bei Newton aus, und zwar in seiner Kosmologie. Newton meint, dass Gott die Sterne so optimal platziert hat, dass kein „Gravitationskollaps“ eintreten kann. Damit wird ein Problem (kosmologisches Paradoxon) von Bentley bezeichnet, das er Newton stellte: Angenommen es gibt eine bis ins Unendliche ausgedehnte Anziehungskraft. Warum sollten sich die Sterne dann nicht gegenseitig anziehen und im gemeinsamen Schwerpunkt kollabieren? Dazu Newton: Nachdem Gott das Universum geschaffen hat, greift er nach wie vor durch ein „kontinuierliches Wunder“ ein. Er sorgt dafür, dass die Sterne nicht ineinander kollabieren. Damit ist auch die Stabilität unseres Sonnensystems garantiert. Auf der anderen Seite ist dieses Eingreifen Gottes rein hypothetisch. Es dient dazu, den Verlust der Energie im Weltall wieder auszugleichen.

3.3.2 Mathematische Leistungen

Die mathematischen Hauptprobleme zur Zeit Newtons (ca. 1670/71) waren einerseits die Tangente zu einer gegebenen Kurve zu bestimmen und andererseits die Fläche unter einer Kurve zu errechnen. Aufgrund seiner Beschäftigung mit der Physik drückt er dies in „*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*“[25] so aus:

„I. *Gegeben die Länge des durchmessenen Weges in jedem Zeitmoment. Zu finden die Geschwindigkeit der Bewegung zu einer gegebenen Zeit.*
II. *Wenn die Geschwindigkeit zu jeder Zeit gegeben ist, die Länge des beschriebenen Wegs zu finden zu einer gegebenen Zeit*.“[26]

Dass Differenzieren und Integrieren zueinander invers sind, erkennt Newton durch ein kinematisches Konzept geometrischer Größen. Diese werden seiner Meinung nach durch kontinuierliche Bewegung erzeugt, d.h. eine Kurve mit der Gleichung $f(x, y) = 0$ entsteht durch kontinuierliche Bewegung eines Punktes, der durch die Koordinaten x und y festgelegt ist. Geometrische Größen jener Art heißen Fluenten, die momentane Zuwachsgeschwindigkeit Fluxion (von lat. Fluere/fluxus, fließen/das Fließen). Newton dürfte diese beiden Begriffe von den mittelalterlichen Begriffen „*forma fluens*“ und „*fluxus formae*“ übernommen haben, allerdings stimmen die Bedeutungen nicht überein. Fluenten bezeichnen bei Newton unbegrenzt wachsende Größen und werden durch die Buchstaben u, x, y und z dargestellt. Die Fluxionen dagegen bezeichnen die Geschwindigkeit, mit denen die Fluenten vermehrt werden, und werden mit den Buchstaben $\dot{u}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ dargestellt.

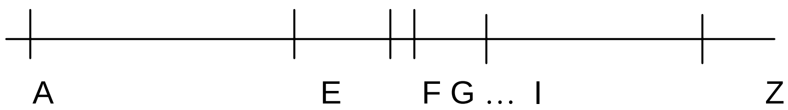
[25] Dieses Werk wurde von John Colson 1736, also erst nach Newtons Tod, veröffentlicht.
[26] zitiert nach Becker O.: „Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung“, Seite 148

Neben den Fluenten und Fluxionen verwendet er auch noch Momente o ($\neq$ 0). Dies sind unendlich kleine Größen bzw. Intervalle. $\dot{x}o$ bedeutet dann die unendlich kleine Zunahme der Fluente x in einem unendlich kleinen Zeitintervall o. Die Punktnotation wie $\dot{x}$ für $\frac{dx}{dt}$ wird noch heute in der Physik verwendet.

3.3.3 Einschub: Isaac Barrow

Prinzipiell gelangt Newton zu den „fließenden Größen" durch seinen Lehrer Isaac Barrow (1630 – 1677), der mit deren Hilfe die Summen von Reihen berechnet. Barrow war eigentlich Theologe und betrachtete die Mathematik als „Hilfswissenschaft" der Theologie.

<u>Beispiel</u>:[27] Die Reihe $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$ verhält sich zur Einheit wie 3:2 bzw. die Reihe $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$ wie 1:2.
Der Beweis kann mit Hilfe kontinuierlicher Größen erfolgen:



Die Punkte A und E sollen die Strecke AZ bzw. EZ mit gleichförmiger Bewegung durchlaufen, wobei E $\frac{1}{3}$ der Geschwindigkeit von A hat. Somit wird in derselben Zeit, in der A die Strecke AE durchläuft, E ein Drittel dieser Strecke durchlaufen, z.B. EF. Genauso durchläuft der erste Punkt die Strecke EF, während der zweite den dritten Teil derselben durchläuft, etwa FG usw. Dies wird fortgesetzt, bis der Körper A den Körper E in I erreicht. Angenommen AE = 1, dann ist EF = $\frac{1}{3}$, FG = $\frac{1}{9}$ und GH = $\frac{1}{27}$ usw. Da sich A aber drei mal so schnell bewegt wie E, ist AI = 3 EI. Daraus folgt: EI : AE = 1:2 und AI : AE = 3:2.

□

Barrow erkannte auch schon, dass Differenzieren und Integrieren zueinander invers sind. Er bringt einen – rein geometrischen – Beweis für den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: ZGE sei eine beliebige Kurve mit VD als Achse. Die Ordinaten VZ, PG, DE stehen senkrecht darauf und sollen ständig wachsen. Die Kurve VIF sei so gewählt, dass DF proportional zur Fläche VZED ist, für irgendeine Normale EDF $\perp$ VD, d.h. VZED = R $\cdot$ DF, R ist beliebig vorgegeben. Sei DE : DF = R : DT und man zeichne die Verbindung zwischen F und T.

<u>Behauptung</u>: TF ist Tangente an VIF.

[27] vgl. derselbe, Seite 146

Beweis: Barrow legt Parallele zu VD und zeigt, dass diese die Kurve links von TF schneiden: wähle I links von F, dann gilt: LF : LK = DF : DT = DE : R bzw. R · LF = LK · DE. R · LF ist aber gleich der Fläche PGED < IL · DE (aufgrund der Kurvenwahl), daher ist auch R · LF = LK · DE < IL · DE, woraus folgt, dass LK < IL.
Nun wähle man J rechts von F, es gilt wieder: ON : FN = DF : DT = DE : R bzw. R · ON = DE · FN, R · JN = Fläche DEHM > DE · FN. Daher ist R · JN > DE · FN = R · ON oder JN > ON.
Daraus folgt, dass TF Tangente ist.

□

Barrow fehlt es hier jedoch noch an der Einsicht, dass dies die Grundlage eines völlig neuen Kalküls werden kann.

Nun möchte ich genauer auf die Fluxionsrechnung eingehen: Diese entwickelt Newton in den Jahren 1665/66 – während die Universität wegen der Pest geschlossen wurde, veröffentlicht sie jedoch nicht vor 1704, da er sich unter anderem auf Descartes gestützt hatte und dessen Lehre mittlerweile ablehnte.

Beispiel zum Auffinden der Tangente:
Gegeben ist die Kurve $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$.
Jedes Glied der Gleichung wird mit dem Exponenten der Fluente multipliziert. Während man multipliziert, verwandelt man einen Faktor der Potenz in seine Fluxion. Dann erhält man das gesuchte Ergebnis:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y}$$

Beweis: *x* und *y* werden durch $x + \dot{x}o$ und $y + \dot{y}o$ ersetzt:

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$$

Nach dem Ausquadrieren kann man $x^3 - ax^2 + axy - y^3$ streichen, da es gleich Null ist. Damit bleibt:

$$3x^2\dot{x}o + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3 - 2ax\dot{x}o - a(\dot{x}o)^2 + ax\dot{y}o + a\dot{x}oy + a\dot{x}\dot{y}oo - 3y^2\dot{y}o - 3y(\dot{y}o)^2 - (\dot{y}o)^3 = 0$$

Nun wird durch o dividiert und anschließend werden die Terme, die noch o enthalten, gestrichen. Sie haben nach Newton keinen Wert, da sie ja unendlich klein sind. Das Streichen beinhaltet auch die Kürzungsregel für Infinitesimalen: $x + \dot{x}o = x$.

$$3x^2\dot{x} + 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} = 0$$

Die Schreibweise o für verschwindende Größen dürfte Newton von James Gregory (1638 – 1675) übernommen haben. Sie finden sich nämlich in seinem Werk „*Geometriae pars universalis*“ aus dem Jahre 1667.

Anwendung: In dem unendlich kleinen Zeitintervall o bewegt sich der Punkt P nach P´. Hier soll die Bewegung geradlinig sein. Die Katheten des rechtwinkeligen

Dreiecks (Newton geht also ebenfalls von Betrachtungen am Dreieck aus) betragen – aufgrund der geradlinigen gleichförmigen Bewegung - $\dot{x}o$ und $\dot{y}o$. Der Neigungswinkel der Tangente wird daher durch folgendes Verhältnis ausgedrückt: $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Um die Tangente zu finden, genügt es also, das Verhältnis der beiden Fluxionen zu berechnen.

Von den Fluxionen $\dot{u}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ gibt es wiederum Fluxionen, die zweiten Fluxionen von *u*, *x*, *y*, *z*, nämlich $\ddot{u}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$. Die dritten Fluxionen von *u*, *x*, *y*, *z* oder die ersten Fluxionen von $\ddot{u}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ werden mit $\dddot{u}, \dddot{x}, \dddot{y}, \dddot{z}$ bezeichnet usw. Aus diesen Überlegungen heraus meint Newton, dass auch *u*, *x*, *y*, *z* Fluxionen von Größen sein können. Diese bezeichnet er mit $\overset{|}{u}, \overset{|}{x}, \overset{|}{y}, \overset{|}{z}$, die wiederum Fluxionen von $\overset{||}{u}, \overset{||}{x}, \overset{||}{y}, \overset{||}{z}$ sein können usw. $\overset{||}{x}, \overset{|}{x}, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$ usw. bezeichnen also eine Reihe von Größen, „*von denen jede spätere die Fluxion der vorhergehenden ist und jede frühere eine Fluente, welche die folgende als Fluxion hat*.“[28]

<u>Beispiel</u>: $\overset{||}{\sqrt{az-zz}}, \overset{|}{\sqrt{az-zz}}, \sqrt{az-zz}, \overset{\bullet}{\sqrt{az-zz}}, \overset{\bullet\bullet}{\sqrt{az-zz}}, \overset{\bullet\bullet\bullet}{\sqrt{az-zz}}$

$\overset{|}{\sqrt{az-zz}}$ bezeichnet die Fläche einer Kurve, mit $\sqrt{az-zz}$ als Ordinate und *z* als Abszisse.

In einem weiteren <u>Beispiel</u> zeigt Newton, wie man Wurzeln differenzieren kann:
Gegeben: $x^3 - xy^2 + a^2\sqrt{ax-yy} - b^3 = 0$

Die Ableitung davon wäre: $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\,\overset{\bullet}{\sqrt{ax-yy}} = 0$

Setze nun $\sqrt{ax-yy} = z \Rightarrow ax - y^2 = z^2$

Die Ableitung dessen ist – nach den obigen Regeln:

$$a\dot{x} - 2y\dot{y} = 2z\dot{z} \;\Rightarrow\; \frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2z} = \dot{z} = \overset{\bullet}{\sqrt{ax-yy}}$$

$$\Rightarrow 3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + \frac{a^3\dot{x} - 2a^2y\dot{y}}{2\sqrt{ax-yy}} = 0$$

Wie schon oben erwähnt, berücksichtigt Newton auch höhere Ableitungen. Dazu meint er, dass es besser sei – um die Rechnung abzukürzen -, wenn man eine Größe als „gleichförmig fließend“ annimmt und die erste Fluxion gleich 1 setzt, die weiteren gleich 0. Dies sei an einem <u>Beispiel</u> verdeutlicht:

Gegeben: $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$

1. Ableitung[29]: $\dot{z}y^3 + 3zy^2\dot{y} - 4\dot{z}z^3 = 0$
2. Ableitung: $\ddot{z}y^3 + \underbrace{3\dot{z}y^2\dot{y} + 3\dot{z}y^2\dot{y}}_{6\dot{z}y^2\dot{y}} + 6zy\dot{y}^2 + 3zy^2\ddot{y} - 12z^2\dot{z}^2 - 4z^3\ddot{z} = 0$

[28] Newton I.: „Abhandlung über die Quadratur der Kurven“, Seite 8
[29] Newton schreibt hier Operation.

3. Ableitung:
$$\dddot{z}y^3 + 9\ddot{z}y^2\dot{y} + 18\dot{z}y\dot{y}^2 + 9\dot{z}y^2\ddot{y} + 3zy^2\dddot{y} + 18zy\dot{y}\ddot{y} + 6z\dot{y}^3 - 4z^3\dddot{z} - 36z^2\dot{z}\ddot{z} - 24z\dot{z}^3 = 0$$

Nimmt man *z* als die gleichförmig fließende Größe an, so ändern sich die Ableitungen zu:

1. Ableitung: $y^3 + 3zy^2\dot{y} - 4z^3 = 0$
2. Ableitung: $6y^2\dot{y} + 6zy\dot{y}^2 + 3zy^2\ddot{y} - 12z^2 = 0$
3. Ableitung: $18y\dot{y}^2 + 9y^2\ddot{y} + 3zy^2\dddot{y} + 18zy\dot{y}\ddot{y} + 6z\dot{y}^3 - 24z = 0$ (*)

Beachten muss man hier aber, dass die Fluxionen in den einzelnen Gliedern dieselbe Ordnung besitzen:

- alle von 1. Ordnung: $\dot{y}, \dot{z}$
- alle von 2. Ordnung: $\ddot{y}, \dot{y}^2, \dot{y}\dot{z}, \dot{z}^2, \ddot{z}$
- alle von 3. Ordnung: $\dddot{y}, \ddot{y}\dot{y}, \ddot{y}\dot{z}, \dot{y}^3, \dot{y}^2\dot{z}, \dot{y}\dot{z}^2, \dot{z}^3, \dot{y}\ddot{z}, \dot{z}\ddot{z}, \dddot{z}$

Ist dies nicht der Fall, muss man die Ordnung durch hinzugedachte Fluxionen einer gleichförmig fließenden Größe vervollständigen, d.h. Gleichung (*) würde vervollständigt so aussehen:

$$18y\dot{y}^2\dot{z} + 9y^2\ddot{y}\dot{z} + 3y^2\dddot{y} + 18zy\dot{y}\ddot{y} + 6z\dot{y}^3 - 24z\dot{z}^3 = 0$$

Hier kommt Newtons Homogenitätsgesetz zur Anwendung. Dies besagt, dass die Anzahl der „Pünktchen“ in den einzelnen Gliedern immer die gleiche ist.

Nun sollen umgekehrt bei gegebenen Fluxionen die Fluenten gefunden werden. Newton gibt zu Beginn eine Regel für die Integration einfacher Kurven an, nämlich $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$, wenn die Kurve durch die Gleichung $y = ax^{\frac{m}{n}}$ gegeben ist. Im Folgenden wird dies bewiesen[30].

$$z = \frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$$

Setzte $c = \frac{an}{m+n}$, $p = m+n \Rightarrow z = cx^{\frac{p}{n}}$ bzw. $c^n x^p = z^n$

Geht x über in $x + o$, dann wird z zu $z + ov$ bzw. $z + oy$, was nach Newton dasselbe ist.

$$\Rightarrow c^n(x+o)^p = (z+oy)^n$$

Dies wird in eine Binomialreihe entwickelt.

$$c^n x^p + c^n p x^{p-1} o + \cdots = z^n + nz^{n-1} oy + \cdots$$

Nach Abziehen von $c^n x^p = z^n$ und Division durch o ergibt sich:

$$c^n p x^{p-1} + \cdots = nz^{n-1} y + \cdots$$

[30] Cantor M.: „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“, Band 3, Seite 157

Die Glieder, die hier durch Punkte angedeutet sind, enthalten noch den Faktor o und verschwinden daher, wenn o verschwindet. Es bleibt also übrig:

$$c^n p x^{p-1} = n z^{n-1} y$$

$$y = \frac{c^n p x^{p-1}}{n z^{n-1}} = \frac{c^n p x^{p-1} z}{n z^n} = \frac{c^n p x^{p-1} z}{n c^n x^p} = \frac{pz}{nx} = \frac{p c x^{\frac{p}{n}}}{nx} = (m+n)\frac{na}{m+n}\frac{x^{\frac{m+n}{n}}}{nx} =$$

$$= ax\frac{m}{n}$$

Man sieht also, dass Newton bereits Potenzen von Polynomen differenzieren konnte, aber von Produkten oder Quotienten ist noch nicht die Rede.

□

Allgemein:
Die Fläche unter einer Kurve *z* = ABD entsteht durch kontinuierliche Bewegung der Ordinate BD. Die Fluxion ergibt sich nun daraus, dass man die Zeit in unendlich viele unendlich kleine Intervalle o einteilt und das Verhältnis zwischen der Flächenzunahme in einem dieser Intervalle und $\dot{x}o$ bestimmt. Die *x* – Achse wird in unendlich kleine Intervalle $\dot{x}o$ = BC unterteilt. Bildet man das Verhältnis zwischen BDEC und BC, weiß man, wie „schnell" die Fläche ABD wächst. Newton behauptet nun, dass es eine Strecke BK gibt, mit BD < BK < CE, so dass BDEC = BK · BC. Damit ist das Verhältnis zwischen BDEC und BC gleich BK. Dies kann man auch auf BD übertragen, da BC unendlich klein ist. Daraus folgt nun, dass die Fluxion $\dot{z}$ gleich *y* = BD ist. Das bedeutet: Wenn die Fläche *z* = ABD unter einer Kurve berechnet werden soll und die Fluxion von *z* berechnet wird, erhält man wiederum *y* = BD als Funktion von *x* = AB. Dies entspricht dem Beweis des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung. Die Quadratur bezeichnet damit die Bestimmung einer Fläche aus ihrem Änderungsverhalten.

Um aus einer Fluxionsgleichung (die Fluxionen müssen in Quotientenform gebracht werden) auf die Fluentengleichung zu schließen, gibt es drei Methoden, entsprechend den drei Gattungen von Gleichungen:

(1) Zwei Fluxionen und eine Fluente: $y' = F(x)$ oder $y' = F(y)$
(2) Zwei Fluxionen und zwei Fluenten: $y' = F(x, y)$
(0) Mehr als zwei Fluxionen: partielle Differenzialgleichungen

Allgemein geht Newton folgendermaßen vor:
Der Ausdruck, der rechts vom Gleichheitszeichen steht, wird in eine unendliche Reihe entwickelt, die nach Potenzen der Fluenten geordnet wird. Probleme gibt es nur dort, wo Ausdrücke der Art $\frac{a}{x}$ auftreten, da die dazugehörigen Fluenten dann die Form $\frac{a}{0}$ haben. In diesem Fall soll der Ausdruck $\frac{a}{x}$ durch $\frac{a}{b \pm x}$ ersetzt werden und durch Division in eine Reihe entwickelt werden. Diese Transformation entspricht einer Koordinatentransformation. Newton beachtet dabei allerdings nicht, dass, wenn *x* beispielsweise in *b* – *x* übergeht, $\dot{x}$ in $-\dot{x}$ übergeht.
Beispiel zu Fall (2):

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2 + 3x - 2y + x^2 + x^2 y \quad (*)$$

Angenommen wird nun:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

Damit ist $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^3 + \dots$

Setzt man den angenommenen Wert von *y* in (*) ein, so gilt andererseits:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} &= 2 + 3x + x^2 + \left(x^2 - 2\right)\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots\right) \\ &= \left(2 - 2A_0\right) + \left(3 - 2A_1\right) x + \left(1 + A_0 - 2A_2\right) x^2 + \dots \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich der beiden Reihen für $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ ergibt sich:

$A_1 = 2 - 2A_0$,
$2A_2 = 3 - 2A_1$,
$3A_3 = 1 + A_0 - 2A_2$, u.s.w.

Die A_i hängen von A_0 ab. Setzt man nun für A_0 einen beliebigen Wert ein, erhält man die Reihe für *y*. Es sind allerdings unendlich viele Reihen für *y* möglich, je nach dem Anfangswert.

Als Lucas-Professor beschäftigt sich Newton dann mit der Umformulierung der Fluxionsmethode aus seiner Jugendzeit, und zwar nach geometrischem Muster. Dabei unterscheidet er zwischen einer <u>analytischen</u> und einer <u>synthetischen Methode</u> der Fluxionen. Bei der ersten Methode werden unendlich kleine Größen verwendet – es ist sozusagen die symbolische Methode. Newton wendet sich aber gegen infinitesimale Größen, da es keine richtige Begründung dafür gibt. Die zweite Methode wird 1671 entworfen und 1680 weiterentwickelt. Hier werden die Fluenten nicht durch algebraische Symbole dargestellt, sondern es wird direkt auf geometrische Figuren Bezug genommen. Zentrales Problem ist es, „das letzte Verhältnis zwischen den verschwindenden Größen“ zu finden. Die neue Methode wird durch folgendes Lemma begründet: „*Größen wie auch Größenverhältnisse, die zu jeder endlichen Zeit beständig der Gleichheit zustreben und vor dem Ende jener Zeit einander näher kommen als jede vorgegebene Differenz, werden schließlich gleich*.“[31]

Der <u>Beweis</u> erfolgt mittels reductio ad absurdum:
Angenommen sei das Gegenteil, d.h. die Größen werden ungleich, und die letzte Differenz sei D. Das bedeutet gleichzeitig, dass sie der Gleichheit nicht näher kommen können als dieser vorgegebenen Differenz D. Dies ist aber gegen die Voraussetzung.

□

Die Fluxionen sind nun verschwindend klein und sollen als Grenzen der Summen und Verhältnisse verstanden werden. „*Jene letzten Verhältnisse, mit denen die Größen verschwinden, sind in der Wahrheit nicht die Verhältnisse der letzten*

[31] zitiert nach „Spektrum der Wissenschaft“, Biographie von Isaac Newton, Heft 1/1999, Seite 48. Dieser Satz ist gleichzeitig auch ein Konvergenzkriterium!

Größen, sondern die Grenzen (limites), denen die Verhältnisse der unbegrenzt abnehmenden Größen jedesmal nähern, und an die sie näher heran können, als irgend eine gegebene Differenz es ausdrückt ...."[32] Hier wird schon die Idee eines Grenzwertes deutlich.

Die Bestimmung des Grenzwertes ist ein typisches Problem in den „*Principia*". Allerdings darf man den Begriff nicht im heutigen modernen Sinn auffassen. Vielmehr wird bei Newton jener Wert bestimmt, *„gegen den das Verhältnis zwischen zwei „fließenden" geometrischen Größen strebt, wenn diese gleichzeitig „verschwinden"*."[33] Daher kommt auch die Formulierung „Methode der ersten und letzten Verhältnisse".

<u>Beispiel</u>: Newton will zeigen, dass das letzte Verhältnis zwischen zwei verschwindenden Größen, nämlich dem Bogen ACB, der Sehne AB und der Tangente AD, gleich 1 ist.

„<u>Beweis</u>": Die „Fluenten" *X* und *Y* verschwinden genau dann, wenn A und B zusammenfallen. Wie bestimmt man dann aber das Verhältnis $\frac{X}{Y}$?

Dazu konstruiert Newton zwei endliche Größen *x* und *y*, so dass $\frac{X}{Y} = \frac{x}{y}$. Wenn B nun gegen A strebt, dann strebt das Verhältnis $\frac{X}{Y}$ gegen $\frac{0}{0}$, während das Verhältnis $\frac{x}{y}$ gegen einen endlichen Wert, nämlich dem Grenzwert von $\frac{X}{Y}$, strebt.

Während nun B gegen A strebt, betrachte man AB und AD bis F und E verlängert, wobei die Strecke FE parallel zu BD ist. Der Bogen $AC'F$ sei dem Bogen ACB ähnlich. Wenn nun A gegen B strebt, wird der Winkel EAF verschwinden und die Geraden AF, AE und der Bogen $AC'F$ zusammenfallen. Damit sind sie gleich. Newton sagt weiter: „*Daher und dadurch werden die proportionalen Geraden AB, AD und der dazwischenliegende Bogen ACB verschwinden, und sie werden als schließlich sich ergebendes Verhältnis das der Gleichheit haben*."[34]

□

Um den Grenzwert zu festigen, bezieht sich Newton auf die geometrische und kinematische Intuition: „*Unter der letzten Geschwindigkeit ist diejenige zu verstehen, mit der der Körper sich bewegt, und zwar weder bevor er den endgültigen Ort berührt und die Bewegung aufhört, noch danach, sondern in dem Augenblick, in dem er ihn berührt*."[35] Für ihn ist es einleuchtend, dass ein Körper, der in Bewegung ist, zu jedem Zeitpunkt eine Geschwindigkeit hat. Genauso sinnvoll, wie von einer letzten Geschwindigkeit zu sprechen, ist es von einem letzten Verhältnis zu sprechen. Erst nach 1800 wird die Existenz eines solchen Grenzwertes problematisiert.

[32] Newton I.: „Abhandlungen über die Quadratur der Kurven", Seite 58
[33] zitiert nach „Spektrum der Wissenschaft", Biographie von Isaac Newton, Heft 1/1999, Seite 48
[34] zitiert nach derselbe, Seite 49
[35] zitiert nach derselbe, Seite 51

Durch das Werk von Wallis lernt Newton auch sehr viel über unendliche Reihen, darunter auch die Formel für die Binomialreihe. Mit deren Hilfe ist es möglich, $(1+x)^{\alpha}$ als Reihe der Potenzen von *x* auszudrücken. α kann dabei sowohl ein positiver als auch negativer Bruch sein:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x^{\alpha-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^{\alpha-2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3 \cdot 2} x^{\alpha-3} + \cdots$$

Im Original sieht die Binomische Reihe folgendermaßen aus:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \cdots$$

Die Koeffizienten *A, B, C*,... bezeichnen jeweils den vorhergehenden Summanden.

Newton kann diese Formel nur für positive, ganzzahlige Exponenten beweisen. Durch einen „glücklichen Zufall“ konnte er sie heuristisch auf positive und negative Brüche erweitern. Der vollständige Beweis für die Binomische Reihe gelingt Newton allerdings nicht, dies ist das Werk von Euler (siehe Kapitel 3.5).
Mit Hilfe dieser Formel war es für Newton auch möglich, die Flächen unter Kurven zu berechnen.

<u>Beispiel</u>: Grégoire de Saint-Vincente und Alfonsius Antonius de Sarosa war es mit geometrischen Mitteln gelungen, die Fläche unter der Hyperbel $y = \frac{1}{1+x}$ in [0,x] mit ln (1 + *x*) zu bestimmen. Mit dem Binomialsatz kann Newton nun beweisen, dass mit *P* = 1, *Q = x, m* = -1, *n* = 1 gilt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{-1} &= 1^{\frac{-1}{1}} + \frac{-1}{1} \cdot 1 \cdot x + \frac{-1-1}{2 \cdot 1} \cdot (-x) \cdot x + \frac{-1-2 \cdot 1}{3 \cdot 1} \cdot x^2 \cdot x + \cdots \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Hier stellt er zwei Regeln auf:

<u>Regel 1</u>: „*Um die unter einer Kurve eingeschlossene Fläche zu berechnen, die als Gleichung eine unendlich Reihe besitzt, muß man die unter der Kurve eingeschlossene Fläche A_i, die durch die einzelnen Terme der Reihe ausgedrückt sind, berechnen und dann alle A_i nacheinander addieren*.“

<u>Regel 2</u>: „*Die Fläche, die unter der Kurve mit der Gleichung y = cx^{α} im Intervall [0,1] eingeschlossen wird, beträgt* $\frac{cx^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.“[36]

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Durch den Gebrauch von unendlichen Reihen erweitert Newton die Anwendungsmöglichkeiten seiner Differenzialrechnung, vor allem die Binomische Reihe erweist sich als sehr hilfreich. Hat man nämlich die Reihenentwicklung der Funktion, ist die Ableitung bzw. das Integral kein Problem mehr. Durch

[36] zitiert nach derselbe, Seite 22

gliedweises Differenzieren bzw. Integrieren erhält man rasch das gesuchte Ergebnis.

Newton untersucht auch die Konvergenz von unendlichen Reihen, dies sei am Beispiel $x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ gezeigt. Diese Reihe hat folgende Eigenschaft: ist $x = \frac{1}{2}$, so hat jedes Glied den Wert der Summe der nachfolgenden Glieder, also:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Setzt man nun den Restwert $R = x^{k+1} + x^{k+2} + x^{k+3} + \cdots = \frac{x^{k+1}}{1-x}$, so folgt:

$x^k + R = x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + x^{k+3} + \cdots = \frac{x^k}{1-x}$ für $x < \frac{1}{2} \Rightarrow 2x < 1$

$\frac{2x^{k+1}}{1-x} < \frac{x^k}{1-x}$ bzw. $2R < x^k + R \Rightarrow R < x^k$. Für $x \le \frac{1}{2}$ geht der Restwert also gegen Null (der Beweis zeigt, dass man statt $\frac{1}{2}$ ein beliebiges $q < 1$ wählen kann). Koeffizienten, die noch dazukommen, nehmen nach Newton ohnehin meist ab, wenn nicht, muss man einfach das x kleiner wählen.

Brook Taylor (1685 – 1731) und Colin MacLaurin (1698 – 1746) entwickelten den (Reihen-)Ansatz von Newton weiter. Taylor gewann z. B. die nach ihm benannte Reihe:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots$$

Seien h und x veränderliche Größen, wo h gleichmäßig um das Inkrement Δh vergrößert wird. Man setzt $n\Delta h = v$, $v - \Delta h = v'$, $v' - \Delta h = v''$ usw. Taylor geht nun von der Annahme aus, dass h um $v = n\Delta h$ wächst. Daher wächst x zu

$$x + \Delta x \frac{v}{1 \cdot \Delta h} + \Delta^2 x \frac{v \cdot v'}{1 \cdot 2 \cdot \Delta h^2} + \Delta^3 x \frac{v \cdot v' \cdot v''}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \Delta h^3} + \cdots$$

Wird nun Δh unendlich klein und setzt man dies gleich dh, wird n unendlich groß, woraus folgt, dass $v = v' = v'' = \ldots$ Die Differenzen Δ gehen über in Differenziale und man erhält:

$$x(h+v) = x + v\frac{dx}{dh} + \frac{v^2}{1 \cdot 2}\frac{d^2x}{dh^2} + \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{d^3x}{dh^3} + \cdots$$

Dies entspricht der obigen modernen Schreibweise.

Ist der Mittelpunkt der Taylorreihe gleich Null, ergibt sich die MacLaurinreihe:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

3.3.4 Der Prioritätsstreit

Obwohl Leibniz und Newton von verschiedenen Grundlagen ausgehen, gibt es doch auch Gemeinsamkeiten zwischen den beiden Ansätzen der Differenzial- und Integralrechnung:

- Newton spricht von Momenten $\dot{x}o$ von fließenden Größen, Leibniz von Differenzialen *dx* von Größen
- Streichungsregel: $x + \dot{x}o = x$ bzw. x + dx = x
- Formulierung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung

Der Unterschied der beiden Methoden betrifft vor allem die dahinter stehende Anschauung: Newton vertritt die antike geometrische Methode, Leibniz hingegen die „neue" Mathematik. Daher versteht letzterer seine Rechenmethode auch als Überwindung der klassischen Mathematik. In einem Brief an Huygens schreibt Leibniz beispielsweise stolz: „*Was an meiner neuen Rechenweise besser und passender ist, besteht darin, daß sie Wahrheiten mit Hilfe einer Art Analyse und ohne jegliche Vorstellungskraft ermöglicht, daß sie wie durch Zauberei funktioniert und daß sie uns gegenüber Archimedes die gleichen Fortschritte ermöglicht, die uns Viète und Descartes gegenüber Apollonius ermöglicht haben*."[37] Newton wollte genau das Gegenteil – eine strenge Begründung. Leibniz sah seine neue Mathematik auch als ersten Schritt zu einer symbolischen Denkmethode. Ob es das Unendliche gibt oder nicht sei „nicht so wichtig", vielmehr sieht man die Effektivität in der Anwendung.

Ein Schüler Newtons – Fatio de Duillier – erhob schließlich 1699 den Vorwurf des Plagiats gegen Leibniz. Es wurde behauptet, dass er, während eines Londonaufenthaltes, die Schriften Newtons in der Bibliothek der Royal Society gelesen und dann nur Name und Notation geändert habe. Im Gegenzug warf Bernoulli – ein Anhänger von Leibniz – Newton vor, er sei derjenige, der abgeschrieben habe. Warum habe er sonst in den „*Principia*" seine Fluxionsrechnung nicht verwendet, wenn er sie doch schon seit 1684 kenne. Weiters wären ihm in den „*Principia*" einige Fehler unterlaufen, die ihm mit der neuen Methode nicht passiert wären. 1710 wurden die Vorwürfe Newtons im offiziellen Organ der Royal Society veröffentlicht, worauf Leibniz – selbst ein Mitglied der Royal Society – einen Widerruf forderte. Schließlich wurde ein Komitee gegründet, das sich um diesen Streitfall kümmern sollte. Dieses stand allerdings heimlich unter der Leitung Newtons. 1713 wurde das Ergebnis, das gegen Leibniz ausfiel, veröffentlicht. Der Prioritätsstreit wurde danach von den Schülern der beiden Mathematiker weitergeführt und erst im 18. Jahrhundert durch Untersuchungen von Gerhardt beendet. Dieser stellte schließlich die Unabhängigkeit zwischen Leibniz und Newton fest.

[37] zitiert nach derselbe, Seite 99

3.4 Die Gegner von Leibniz und Newton

Der Großteil der Kritik betrifft vor allem die Begriffsbildung der unendlich kleinen oder unendlich großen Größen.

3.4.1 Bischof George Berkeley

Schon während seiner Studien- und Dozentenzeit setzt sich der Theologe und Philosoph Berkeley (1685 – 1753) mit den Denkern seiner Zeit auseinander, als da wären Descartes, Malebranche, Bacon oder Newton. 1734, im Jahre, wo Berkeley anglikanischer Bischof von Cloyne (Irland) wird, veröffentlicht er das Werk „*The Analyst*", der gesamte Titel lautet übersetzt: „*Der Analytiker oder eine Erörterung, gerichtet an einen ungläubigen Mathematiker* [Halley], *worin untersucht wird, ob der Gegenstand, die Prinzipien und die Schlussweisen der modernen Analysis deutlicher begriffen oder einleuchtender hergeleitet sind als die religiösen Geheimnisse und Glaubenspunkte*." Hier versucht er die Theologie zu verteidigen, indem er der Mathematik ebenfalls „Unbegreiflichkeiten" nachweist.

Der Grundsatz, der seine Philosophie beherrscht, lautet: „*Sein ist Wahrgenommenwerden oder Wahrnehmen (oder Wollen, d.h. Handeln)*."[38] Wenn der Mensch nun etwas nicht mehr wahrnimmt, müsste es aufhören zu existieren. Aber Gott nimmt alles wahr, also existiert es weiter. Nur Gott allein kommt Unendlichkeit zu, womit es keine räumliche oder zeitliche Unendlichkeit gibt oder eine aktual unendliche Teilung. Weiters versucht er die Mathematik auf eine sensualistische Basis zu stellen, aufgrund seiner Beschäftigung mit der Wahrnehmung. Die Geometrie behandelt demnach ausschließlich gesehene oder gefühlte Dinge, nicht Punkte oder Flächen. Ein Punkt wäre hier ein eben noch sichtbares Ding (minima sensibilia). Diese kleinsten noch wahrnehmbaren Größen bilden die Grenze der Existenz, darunter gibt es nichts mehr. Daraus folgt, dass nach Berkeley auf einer Strecke nur endlich viele Punkte liegen. Somit gibt es in seiner Geometrie nur noch diskrete Gebilde, keine kontinuierlichen mehr. Allerdings muss er durch die Erfindung des Mikroskops zugestehen, dass – in einem uneigentlichen Sinn – Strecken doch beliebig teilbar sind. Man kann nämlich im Mikroskop erkennen, dass selbst die kleinsten Größen noch Teile haben. „Uneigentlicher Sinn" meint hier folgendes: Berkeley unterscheidet zwischen Zeichen und Bezeichnetem. Nimmt man nun die kleinste noch sichtbare Linie als Zeichen für eine größere Linie, kann diese noch weiter geteilt werden. Die ursprüngliche Linie ist also real gesehen unteilbar, aber als Zeichen für eine andere indirekt teilbar – aber nur dann, wenn die andere, durch sie bezeichnete Linie teilbar ist. Auch dieser Weg führt nur zur potentiell unendlichen Teilbarkeit.

Dadurch, dass Berkeley die unendliche Teilbarkeit leugnet, leugnet er auch die Inkommensurabilität, sowie die Infinitesimalmathematik. Die sich damit beschäftigenden Mathematiker, vor allem Newton, bezeichnet er als „Nihilarians" („Nichtsler"), da sie ja faktisch über „nichts" reden.

Am 19. November 1707 hält Berkeley den Vortrag „*Of Infinities*" (ein Vorläufer des „*Analyst*") vor der Dubliner Philosophical Society: Er wendet sich hier explizit

[38] Speck J.:„Grundprobleme der großen Philosophen - Philosophie der Neuzeit I", Seite 217

gegen die Infinitesimal- und Fluxionsrechnung und versucht diese sogleich mit Hilfe John Lockes „*Essay – Vom menschlichen Verstand*“ zu widerlegen. Die Stelle, auf die er sich beruft, lautet: „... *doch mit der Idee irgendeiner Quantität, die der Geist erfasst, und die zugleich in dieser Idee begrenzt ist, Unendlichkeit verbinden, heißt, einer wachsenden Größe ein festes Maß anpassen. Und deswegen, meine ich, ist es nicht eine bedeutungslose Spitzfindigkeit, wenn ich sage, daß wir sorgfältig zwischen der Idee der Unendlichkeit des Raumes und der Idee eines unendlichen Raumes unterscheiden müssen*.“[39] Die Idee der Unendlichkeit des Raumes existiert, die andere Idee nicht. Daher kann man nach Berkeley auch nicht von einer Vorstellung von infinitesimalen Größen bzw. Teilen sprechen. Zu den Infinitesimalen sagt er: „*Sie sind weder endliche Größen noch unendlichkleine Größen, noch überhaupt irgendetwas. Sollten wir sie dann nicht die Geister von abgeschiedenen Größen nennen?*“[40] F. Cajori entgegnet dazu: „... *dieses waren die lebendigsten und produktivsten Geister, die jemals die geistesgeschichtliche Bühne betraten*.“[41]

In der Mathematik sollten keine Zeichen ohne Idee benutzt werden, gerade das tun aber die Leute, die infinitesimale Größen verwenden. Der „richtige Weg“ sei stattdessen eine (natürlich verbesserte) Indivisibilienmethode, wobei die Indivisibilien die „minima visibile“ seien.
Das Ziel des späteren Werkes „*The Analyst*“ ist es, die Grundlagen, Prinzipien (hier: grundlegende, zu beweisende Sätze) und Beweismethoden der Analysis zu überprüfen, genauer gesagt die Fluxionen und Momente Newtons bzw. die Differenzen von Leibniz. Die Prinzipien der Fluxionsmethode, auf die sich Berkeley beruft, sind folgende:

„1. *Die Fluxion eines Rechtecks (Produkt) AB ist aB + Ab, wenn a und b die Inkremente (Ableitungen) von A bzw. B sind.*
2. Die Fluxion von x verhält sich zu der von x^n *wie* 1 *zu* nx^{n-1}.“[42]

ad 1) Die Fluxion des Rechtecks ist deswegen so wichtig, da daraus die allgemeine Regel zur Berechnung von Produkten abgeleitet wird. Also sollte es genau und verständlich abgeleitet werden – dem ist nach Berkeley aber nicht so.

Newton rechnet folgendermaßen: *A*, *B* seien die Seiten eines wachsenden Rechtecks, *a, b* deren Inkremente. Er betrachtet das Rechteck zu dem Zeitpunkt, wo *A* um $\frac{1}{2}a$ und *B* um $\frac{1}{2}b$ kleiner waren:

$$\left(A-\frac{1}{2}a\right)\left(B-\frac{1}{2}b\right)=AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}Ab+\frac{1}{4}ab$$

Dann betrachtet er das Rechteck zu dem Zeitpunkt, wo *A* und *B* um jeweils *a* und *b* gewachsen sind, also: $\left(A+\frac{1}{2}a\right)\left(B+\frac{1}{2}b\right)=AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}Ab+\frac{1}{4}ab$

[39] Berkeley G.: „Schriften über die Grundlagen der Mathematik und Physik“, Seite 75
[40] derselbe, Seite 121
[41] Cajori F.: „Indivisibles and >>Ghosts of Departed Quantities<< in the History of Mathematics“, Scientia (Rivista di Scienza) 37, 1925, Seite 306
[42] derselbe, Seite 18

Die Differenz der beiden liefert dann das Inkrement des Rechtecks: *aB* + *Ab*.

Berkeley wendet nun ein, dass man die Seiten um ein ganzes Inkrement verlängert betrachten soll, nicht um $\frac{1}{2}$ mehr oder weniger. Dann ergibt sich nämlich:
$(A+a)(B+b)=AB+aB+Ab+ab$. Abzüglich dem ursprünglichen Flächeninhalt *AB* ergibt sich dann das wahre Inkrement: *aB* + *Ab* + *ab*. *ab* kann nicht mit legitimen Mitteln beseitigt werden, denn in der Mathematik darf jeder noch so kleine Fehler nicht vernachlässigt werden. Ergo nützt es auch nichts, wenn man *ab* als noch so klein annimmt.

ad 2) Auch beim Auffinden der Fluxion von x^n wendet Newton einen Trick an, da er anfangs o als etwas Reales betrachtet, dann aber $o = 0$ setzt, um zu nx^{n-1} zu gelangen. Dies ist nach Berkeley unerlaubt. Denn, wenn *x* beim Fließen einen Zuwachs o erhält, muss dieser als solcher bestehen bleiben und kann nicht einfach durch Null setzen verschwinden. Das ist für ihn ein Widerspruch, so etwas wäre in der Theologie als Beweis nicht zulässig. Die sich daraus ergebenden Annahmen/Ergebnisse werden trotzdem beibehalten, da sich die Fehler „gegenseitig aufheben“. Gleiches kritisiert Berkeley auch an Leibniz: zuerst werden die infinitesimalen Größen vorausgesetzt, um dann wieder beseitigt zu werden.

Was das Sich-Aufheben der Fehler betrifft, gibt Berkeley folgendes Beispiel:
Die Fläche von ABC sei x^2, gesucht ist y = BC. Wenn *x* fließt, wird es zu $x + o$ und die Fläche x^2 wird zu $(x + o)^2 = x^2 + 2xo + o^2$, also zu ADH. Das Inkrement von x^2 wird BDHC = BDFC + CFH. Angenommen CFH = qo^2 (warum wird von Berkeley nicht näher erläutert).

$$\Rightarrow \; 2xo + o^2 = yo + qo^2$$
$$2x + o = y + qo$$

An dieser Stelle wird nun angenommen, dass o verschwindet, woraus sich $2x = y$ ergibt. Dadurch werden ABC und CFH Dreiecke und ACH eine Gerade.
Die richtige Lösung ergibt sich also so: $2x + o = y + qo$, wobei *q* die Einheit ist (auch dies wird von Berkeley nicht näher begründet), daher heben sich o und qo weg.

Allerdings kann Berkeley, wie schon Nieuwentijt vor ihm (siehe Kapitel 3.4.3), nicht leugnen, dass die Infinitesimalrechnung stets zu brauchbaren Ergebnissen führt.

3.4.2 Jean Le Rond D´Alembert

D´Alembert (1717 – 1783) studierte anfangs Theologie, Jurisprudenz und Medizin, wandte sich schließlich aber der Mathematik zu. 1741 wurde er Mitglied der „*Académie des sciences*“ und 1754 der „*Académie Française*“. 1743 veröffentlichte er sein Hauptwerk: „*Traité de dynamique*“. Dort entwickelte er unter anderem die Gesetzmäßigkeit der Bewegung von Massenpunkten, die von äußeren Kräften beeinflusst werden.

D´Alembert arbeitet auch an einer Enzyklopädie, wo er im Artikel „infini“ den Gebrauch metaphysischer Begriffe im Infinitesimalkalkül ablehnt, sowie den Gebrauch der Begriffe „unendlich Klein“ und „unendlich Groß“ als aktuale Größen. Denn eine Größe ohne Ausdehnung ist nicht messbar, da ohne Raum die Zeit nicht gemessen werden kann.

Im Artikel „limite“ gibt er auch schon eine geometrische Definition des Grenzwertbegriffes, der von Cauchy dann präzisiert wird (siehe Kapitel 3.6). D´Alembert meint, dass die Theorie des Grenzwertes grundlegend für die „wahre Metaphysik des Differenzialkalküls“ sei. Beim Begriff des Differenzialkalküls muss man allerdings vorsichtig sein. D´Alembert betrachtet zwar das Leibnizsche Differenzialkalkül und die Newtonsche Fluxionsmethode unter dem obigen Begriff, aber er ist sich sehr wohl um die Unterschiede der beiden Theorien bewusst (behandelt sie aber gleichwertig). Betrachtet Leibniz unendlich kleine Größen, so versucht Newton die Grenzen der letzten Verhältnisse zu finden. D´Alembert erkennt die Bedeutung des Grenzbegriffs bei Newtons Methode. Doch gleichzeitig „verurteilt“ er denselben, da seiner Meinung nach der Begriff der Bewegung hier nichts zu suchen hat – er ist eine „fremde Vorstellung“. Man hat nämlich keinen klaren Begriff darüber, was die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt überhaupt sein soll. Geschwindigkeit, sofern sie gleichförmig ist, ist nichts anderes als ein Verhältnis aus Raum und Zeit. Ist Bewegung aber veränderlich, ist sie durch das Verhältnis des Differenzials des Raumes zu dem der Zeit gegeben. Dieses Verhältnis kann man sich als Grenze vorstellen. Erst damit kann man nach D´Alembert den Begriff der Fluxion voll erfassen. Mit anderen Worten: Der Begriff der Bewegung ist durch den Begriff der Grenze der Verhältnisse endlicher Fluxionen zu ersetzen.

D´Alembert ist es damit gelungen, den (Newtonschen) Bewegungsbegriff zum Begriff der Grenze weiter zu entwickeln: „*Man sagt, eine Größe ist die Grenze einer anderen Größe, wenn sich die zweite der ersten stärker annähern kann als eine [beliebig] gegebene Größe – wie klein man die auch annehmen mag -, ohne daß jedoch die Größe, die sich nähert, jemals die gegebene Größe, der sie sich nähert, übertrifft; so daß schließlich die Differenz der nämlichen Größe zu ihrer Grenze vollkommen bestimmbar ist*.“[43] Die Differenz zwischen dem Grenzwert und einer dieser Größen ist nach ihm „*absolut unwesentlich*“[44].

Auf diese Definition folgen die beiden wichtigsten Sätze über Grenzen:

1. Sind *a, b* zwei Größen und sind sie die Grenze der gleichen Größe, so gilt *a* = *b*.
   $[\lim c = a \text{ und } \lim c = b \;\Rightarrow\; a = b]$
2. Seien *a*, *b* zwei Größen und *a* · *b* das Produkt aus beiden. Sei *c* die Grenze von *a* und *d* die Grenze von *b*. Dann folgt, dass *c* · *d* die Grenze von *a* · *b* ist.
   $[\lim a = c,\; \lim b = d \;\Rightarrow\; \lim(a \cdot b) = c \cdot d]$

[43] D´Alembert J. le R.: „Encyclopédie, ou dictionnaire raisonne des sciences, des arts es des métiers, par une société de gens lettres. Mis en ordre et publié par M. Diderot; et quant à la partie mathématique, par M. d´Alembert.“, Band 6, Paris 1756, Seite 542
[44] Volkert K.: „Geschichte der Analysis“, Seite 174

Er unterscheidet bei seinem Grenzbegriff zwischen der Variablen und ihrer Grenze, die sie nie erreicht. Daher muss er auch nicht mit unendlich kleinen Größen arbeiten. „*Die Grenze hat hiermit hier nicht den Sinn des Verhältnisses; sie gilt nur als der letzte Werth, dem sich eine andere Größe von gleicher Art beständig so nähere, daß sie von ihm, so wenig als man will, unterschieden seyn könne, und daß das letzte Verhältniß, ein Verhältniß der Gleichheit sey*.“[45]

Das Differenzialkalkül benötigt damit keine unendlich kleinen Größen mehr. Man muss lediglich algebraisch die Grenze eines Verhältnisses bestimmen. Hat man bereits eine Kurvengleichung gegeben, so erhält man durch Gleichsetzen der Grenzen auf beiden Seiten der Gleichung die Gleichung der gesuchten Kurve (Tangente).

3.4.3 Bernard Nieuwentijt

Der holländische Philosoph und Mathematiker Nieuwentijt (1654 – 1718) studierte zwischen 1675 und 1676 Medizin und Rechtswissenschaften. Er versuchte später das naturwissenschaftliche und mathematische Wissen seiner Zeit für einen teleologischen Gottesbeweis zu nutzen.

Nieuwentijt veröffentlichte auch eigene Arbeiten zum Thema der Infinitesimalrechnung, wie „*Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia*“ 1694 oder „*Analysis infinitorum*“ 1695. Allerdings verwendet Nieuwentijt in seinen Werken nicht den Begriff der unendlich kleinen Größe, sondern ersetzt ihn durch „kleiner als jede gegebene Größe“.

Nieuwentijt hat drei Kritikpunkte betreffend die Differenzialrechnung:

(1) Größen, die unendlich klein sind, werden als Nichts weggelassen.
(2) Die Differenzialrechnung kann nicht auf Exponentialfunktionen angewandt werden.
(1) Differenziale höherer Ordnung, also z. B. d^2x, d^3x usw. ergeben keinen Sinn.

Für Leibniz war eine Antwort auf diese Angriffe kein Problem. In den „*Acta Eruditorum*“ von 1695 gibt er folgende „Gegendarstellung“:

(1) Er gibt zu, dass die indirekte Beweismethode der Griechen die bessere Methode ist, um die Wahrheit von Sätzen zu überprüfen. Doch kann man sich auch des unendlich Kleinen bedienen. Denn Figuren, die aus unendlich kleinen Linien bestehen, sind immer zu endlichen Figuren ähnlich. Damit kann man Verhältnisse von „nicht angebbaren Größen“ durch solche von „angebbaren Größen“ ersetzen.

(2) Leibniz beginnt auch hier mit einem „Zugeständnis“:
Ist nämlich $y^x = z$, dann ist die Ableitung (nach Weglassen der Produkte von Differenzialen):[46]

[45] König G.: „Konzepte des mathematisch Unendlichen im 19. Jahrhundert“, Seite 123
[46] vgl. Cantor M.: „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“, Band 3, Seite 255f

$$dz = (y + dy)^{x+dx} - y^x = y^{x+dx} + xy^{x+dx-1}dy - y^x$$

Doch hier liegt nach Leibniz ein Fehler, denn die Homogenität der Differenziale ist nicht gewährleistet. Damit kann das Verhältnis von *dx* zu *dy* nicht mehr geliefert werden. Vielmehr muss man die Differenziale, wenn sie mit endlichen Größen gemischt auftreten, Null setzen. Daraus ergibt sich folgende Gleichung:

$$0 = y^{x+0} + xy^{x+0-1} \cdot 0 - y^x \quad \text{bzw.} \quad 0 = y^x - y^x$$

Dies ist nun zwar eine wahre Aussage, aber dennoch nicht zielführend. Daher ist folgender Weg einzuschlagen:

Es ist $\int \frac{dx}{x} = \log x$.

Aus $x^v = y$ folgt die Gleichung $v \cdot \log x = \log y$. Unter Anwendung der Integralform ergibt sich:

$$v \cdot \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

Differenziert man diese Gleichung, folgt:

$$v \cdot \frac{dx}{x} + dv \cdot \log x = \frac{dy}{y}$$

Und daraus wird

$$d(x^v) = x^v \cdot \frac{v}{x} dx + x^v dv \log x$$

(3) Gegen diesen Einwand geht Leibniz folgendermaßen vor: Er nimmt an, die *x* verlaufen geometrisch und die *y* arithmetisch. Das Verhältnis *dx* : *dy* = *x* : *a* ist dann richtig, wenn *a* und *dy* konstant sind. Daraus folgt:

$$dx = \frac{xdy}{a}$$

Durch Differenzieren erhält man:

$$ddx = \frac{dx \cdot dy}{a} = \frac{dx \cdot dx}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{ddx}{dx} = \frac{dx}{x}$$

Hieraus wird ersichtlich, dass das höhere Differenzial gegenüber dem niedrigeren genauso unendlich klein ist, wie vorher das erste Differenzial gegenüber der endlichen Größe.

3.5 Leonhard Euler

Euler wurde am 15. April 1707 in Basel geboren. Sein Vater hörte Vorlesungen bei Jakob Bernoulli und unterrichtete seinen ältesten Sohn in der Mathematik. Mit 13 Jahren begann Euler sein Studium (Philosophie und Recht) und 1723 erhielt er seinen Magistertitel. Johann Bernoulli – der Bruder von Jakob – erkannte Eulers Talent und förderte ihn beim Studium der Mathematik, dem er sich nach Abbruch des Theologiestudiums widmete. Doch nicht nur die Mathematik erweckte Eulers Interesse. Er beschäftigte sich auch mit folgendenden Disziplinen: Physik, Astronomie, Architektur, Theologie, Musiktheorie. Im Jahre 1783 starb Euler in St. Petersburg.

Seine Mathematik ist vor allem durch zwei Punkte gekennzeichnet:

- „algebraische Analysis“: algebraischer Charakter von Ideen in der Analysis
- Euler behandelt immer Theorie und Praxis

Euler rechnet zu Beginn mit unendlich großen Zahlen, die er meist mit *i* bezeichnet, genauso wie mit großen natürlichen Zahlen. Zu jeder Größe kann man eine noch größere finden, egal wie groß sie auch sein mag. Daher können Größen bis ins Unendliche vermehrt werden. Er schreibt: „*Daraus also, daß eine jede Größe ins Unendliche vermehrt werden kann, fließet selbst, daß es keine unendliche Größe gebt. Denn eine Größe, die immer fort vermehrt wird, wird nicht eher unendlich, ehe sie nicht ohne Ende gewachsen ist; was aber ohne Ende geschehen muß, das kann man nicht als schon geschehen betrachten*.“[47] Daraus schlossen nun einige Mathematiker, argumentiert er weiter, dass es eine unendliche Größe gibt, die nicht mehr vermehrt werden kann. Damit erzeugen sie aber einen Widerspruch, denn sie leugnen, dass man eine Größe bis ins Unendliche vermehren kann. Man kann daher nicht einfach ein eigenes Zeichen für eine solche Größe setzen. In der Mathematik kommt man aber manchmal ohne solche unendliche Größen nicht aus. Will man z. B. die Summe von 1 + 2 + 3 + 4 +… angeben, so ist das nicht mit einer endlichen Größe möglich. „*Wenn daher eine Größe so groß ist, daß sie größer ist als jede gegebene endliche Größe, so kann sie keine andere als eine unendliche Größe seyn*.“[48] Angegeben werden sie mit ∞. In den „*Anmerkungen und Zusätzen zum ersten Theile*“ findet sich weiterführend folgendes:[49]

1) „*Jede unendliche Größe wird durch eines der folgenden Zeichen angedeutet*, ∞, ∞^2, ∞^3.“
Hierbei bedeutet ∞ unendlich vom ersten Grade, ∞^2 unendlich vom zweiten Grade usw.

3) „*Ein Unendliches vom zweyten Grade ist unendlichmal größer als ein Unendliches vom ersten Grade, und eben so das Unendliche vom dritten Grade in Vergleichung mit dem vom zweyten*.“

4) Hier werden „Rechenregeln“ aufgestellt: $\infty \pm 1 = \infty$, $\infty^2 + \infty = \infty^2$, $\infty^3 - \infty = \infty^3$

5) Eine unendlich kleine Größe kann durch einen Bruch dargestellt werden, wobei der Zähler endlich, der Nenner aber unendlich ist: $\frac{1}{\infty}, \frac{1}{\infty^2}, \frac{1}{\infty^3}, \cdots$ Diese Brüche bezeichnen ein unendlich Kleines zum ersten, zweiten, dritten, ... Grad.
Bei einem Bruch, wo der Nenner ein Unendliches von höherem Grade als der Zähler ist, ist das Ergebnis ein unendlich Kleines: $\frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$

6) „*Ein unendlich Kleines vom zweyten Grade ist unendlich mal kleiner als ein unendlich Kleines vom ersten Grade, und eben so verhält es sich mit den übrigen ohne Ende*.“

---

[47] Euler L.: „Differentialrechnung“, Seite 73
[48] derselbe, Seite 79
[49] siehe Euler L.: „Differenzialrechnung zweyter Theil“, Seite 313f

7) Rechenregeln: $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1, \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$

Wie bei unendlich großen Größen ist es auch im umgekehrten Fall, wenn eine unendlich kleine Größe bis ins Unendliche verringert wird. Unendlich kleine Größen verschwinden und sind kleiner als jede angebbare Größe, daher – so folgert Euler – müssen sie gleich Null sein (eine allgemeine Erklärung für die Infinitesimalen gibt er nicht). Wären sie nicht Null, so könnte man eine kleinere angebbare Größe finden, was gegen die Voraussetzung ist. Dennoch haben sie in der Mathematik eine Bedeutung, wie man bei Betrachtung der zwei Gleichheitsbegriffe sieht:

<u>Arithmetische Gleichheit</u>: die Differenz zweier Größen *a* und *b* ist = 0
<u>Geometrische Gleichheit</u>: der Quotient zweier Größen *a* und *b* ist = 1

Wie verhalten sich unendlich kleine Größen bezüglich dieser zwei Gleichheitsbegriffe?
Ist *a* eine endliche Größe, *dx* unendlich klein, dann gilt: $a \pm n\,dx = a,\ n \in \mathbf{N}$.
Arithmetisches Verhältnis: $a \pm n\,dx - a = \pm n\,dx = 0$
Geometrisches Verhältnis: $\frac{a \pm ndx}{a} = 1 \pm \frac{ndx}{a} = 1$

Ist weiters *dx* unendlich klein, so gilt arithmetisch: $dx = (dx)^2 = 0$. Dagegen sind diese Größen geometrisch nicht gleich, da: $\frac{(dx)^2}{dx} = dx = 0$. Aus diesen Verhältnissen kann man erkennen, dass unendlich kleine Größen arithmetisch gleich, aber geometrisch verschieden sein können. Ja, Euler sagt: „*Die unendlich kleinen Zahlen sind nichts anderes als Symbole für die verschiedenen geometrischen Verhältnisse bei arithmetischer Gleichheit*."[50] Gerade das Auffinden dieser Verhältnisse ist die Aufgabe der Differenzialrechnung.

Bei den unendlich großen Größen verhält es sich nun genau umgekehrt, sie können arithmetisch verschieden und geometrisch gleich sein, denn:
Seien *a, b* endliche Größen, $b \neq 0$, dann sind $\frac{a}{dx}, \frac{a}{dx} + b$ unendlich groß.
Arithmetisches Verhältnis: $\frac{a}{dx} + b - \frac{a}{dx} = b \neq 0$
Geometrisches Verhältnis: $\left(\frac{a}{dx} + b\right) \div \frac{a}{dx} = 1 + \frac{bdx}{a} = 1$

Im heutigen Sinn bedeutet „das arithmetische Verhältnis zweier Zahlen ist gleich" eine Äquivalenzrelation: *a* ist äquivalent zu *b*, $a \approx b$, wenn $a - b$ unendlich klein ist. Selbiges gilt für das „geometrische Verhältnis ist gleich": die Äquivalenzrelation gilt für alle Zahlen $\neq 0$: *a* äquivalent *b*, wenn $\frac{a}{b} \approx 1$. Äquivalenzrelationen sind aber erst seit ca. 100 Jahren gebräuchlich.

---

[50] Volkert K.: „Geschichte der Analysis", Seite 153

Multipliziert man unendlich große und kleine Größen miteinander, so liefert dies unterschiedliche Ergebnisse:

- $\frac{a}{dx} \cdot dx = a$ endliche Größe
- $\frac{a}{dx} \cdot dx^3 = adx^2$ unendlich kleine Größe
- $\frac{a}{dx^2} \cdot dx = \frac{a}{dx}$ unendlich große Größe
- Allgemein: $\frac{a}{dx^n} \cdot bdx^m = abdx^{m-n}$ *m* = *n* ergibt eine endliche Größe

  m < *n* ergibt eine unendlich große Größe
  m > *n* ergibt eine unendlich kleine Größe

Eine unendlich kleine Größe ist – wie oben schone erwähnt – gleich Null. Wenn nun *dx* eine solche unendlich kleine Größe darstellt, so sind auch alle höheren Potenzen von *dx* gleich Null. Des Weiteren kann man Differenziale höherer Ordnung gegenüber solchen niederer Ordnung vernachlässigen. Der Beweis erfolgt mittels arithmetischen und geometrischen Verhältnissen:

Arithmetisch: $dx \pm dx^2 - dx = \pm dx^2 = 0$ allgemein: $dx \pm dx^{n+1} = dx$
Geometrisch: $\frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1$ allgemein: $\frac{dx \pm dx^{n+1}}{dx} = 1 \pm dx^n = 1$
Die „algebraische Analysis“ oder Analysis des Unendlichen betrifft hauptsächlich Reihen bzw. das Rechnen mit unendlichen Ausdrücken: Reihen, die ein Bildungsgesetz und damit ein allgemeines Glied haben, können algebraisch oder arithmetisch aufgefasst werden. Arithmetisch bedeutet, dass man die einzelnen Glieder als Zahlen ansieht – Konvergenz wird vorausgesetzt. Dagegen bedeutet die algebraische Auffassung, dass Addition und Subtraktion der Zusammenfassung von Gliedern dienen – Konvergenz ist Nebensache. Letztere Auffassung behandelt Euler.

3.5.1. Betrachtungen zu Reihen

Zu Beginn der Überlegungen zu Reihen möchte ich den Beweis Eulers des Binomischen Lehrsatzes wiedergeben, der Newton nicht gelungen war:[51]

Ist $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots = [n]$$

Hat man nun zwei Ausdrücke der Art [*n*], [*m*], kann man das Produkt [*n*] · [*m*] als Reihe 1 + $Ax + Bx^2 + Cx^3$ + ... darstellen. Die Koeffizienten *A, B, C*,... können dann durch *m* und *n* dargestellt werden:

[51] Euler L.:„Commentationes analyticae ad theoriam seriarum infinitarum pertinentes“ (volumen secundum), Seite 207ff

$$[m]=1+\frac{m}{1}x+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}x^2+\cdots$$

$$[n]=1+\frac{n}{1}x+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}x^2+\cdots$$

$$\Rightarrow [m]\cdot[n]=1+\frac{m}{1}x+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}x^2+\cdots+\frac{n}{1}x+\frac{m}{1}\frac{n}{1}x^2+\cdots+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}x^2+\cdots$$

Vergleicht man dies nun mit der allgemein angenommenen Reihe, erhält man:

$$A=m+n$$

$$B=\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}\frac{n}{1}+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}=\frac{m^2-m}{2}+mn+\frac{n^2-n}{2}=\frac{m^2+n^2+2mn-m-n}{2}=\frac{m+n}{1}\frac{m+n-1}{2}$$

usw.

Allgemein erhält man: $[m]\cdot[n]=[m+n]$. Hier ist es einerlei, ob m und n ganzzahlig oder rational sind.

Angenommen $m = n = \frac{t}{2}$ (t $\in \mathbb{N}$):

$$\Rightarrow \left[\frac{t}{2}\right]^2=[t] \text{ und } [t]=(1+x)^t$$

$$\Rightarrow \left[\frac{t}{2}\right]=(1+x)^{t/2}$$

und allgemein: $a, t \in \mathbb{N}$: $\left[\frac{t}{a}\right]=(1+x)^{t/a}$

Damit ist die Newtonsche Formel für positive rationale Exponenten bewiesen. Es fehlt noch der Fall, wenn der Exponent negativ ist:
Setzt man $n = -m$ in $[m]\cdot[n]=[m+n]$, dann folgt:
$m + n = 0 \Rightarrow [0] = (1 + x)^0 = 1$

Damit wird die Formel $[m]\cdot[n]$ zu $(1 + x)^m \cdot [-m] = 1$ und auch der letzte Fall ist bewiesen, denn:

$$[-m]=\frac{1}{(1+x)^m}=(1+x)^{-m}$$

□

Eulers Interesse gilt auch – wie schon zuvor Leibniz – den <u>harmonischen Reihen</u>. Diese heißen harmonisch, da, sind drei Glieder gegeben, das mittlere Glied das harmonische Mittel der beiden anderen ist:

Allgemeine Form der harmonischen Reihe: $\frac{c}{a},\frac{c}{a+b},\frac{c}{a+2b},\frac{c}{a+3b},\ldots$

$$h=\frac{2xy}{(x+y)}$$

$$h=\frac{2\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{a+2b}}{\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{a+2b}\right)}=\frac{2c^2a\,(a+2b)}{(2ac+2bc)a\,(a+2b)}=\frac{c}{a+b}$$

Das Verfahren von Leibniz zur Summation von unendlichen harmonischen Reihen benutzt auch Euler, wobei dieser unendlich große obere Summationsgrenzen verwendet. So ist die Summenformel für harmonische Reihen[52]:

$\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k}=\ln i+C$, wo i unendlich groß[53] ist, $C=\lim_{x\to\infty}\left\{\sum_{1\le n\le x}\frac{1}{n}-\log x\right\}\approx 0{,}5772$. C wird heute als EULERsche Konstante bezeichnet.

Aus dieser Formel leitet Euler z. B. den Wert der alternierenden harmonischen Reihe ab:
Er wendet folgendes an: ln m = ln (mi) – ln i, i wieder unendlich groß. Dann ist

$$\ln 2=\ln(2i)-\ln i\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2i-1}+\frac{1}{2i}-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{i}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-+\cdots+\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}$$

Am folgenden Beispiel[54] erkennt man, wie souverän Euler mit dem unendlich Großen umgeht:

Gesucht ist die Summe der folgenden Reihe:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{3}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}-\frac{4}{14}+\cdots$$

Diese Reihe ergibt sich aus der Differenz der beiden Reihen:

(1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{i\cdot\frac{i+3}{2}}$

(2) $1+\frac{3}{5}+\frac{4}{9}+\frac{5}{14}+\cdots+\frac{i+1}{i\cdot\frac{i+3}{2}}$

Die Endglieder dieser Reihen bedeuten, dass die Reihe bis ins Unendliche fortgesetzt werden kann. Die Summe der ersten Reihe beträgt C + ln i + ln (i +3) – ln 2 (wie oben ist $C \approx 0{,}5572$).

---

52 König G.: „Konzepte des mathematischen Unendlichen im 19. Jahrhundert“, Seite 12
53 Im Folgenden bedeutet i immer eine unendlich große Zahl
54 Laugwitz D.: „Zahlen und Kontinuum – eine Einführung in die Infinitesimalmathematik“, Seite 45f

Die zweite Reihe kann man in folgende beiden auflösen:

(2a) $\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{i}\right)$

(2b) $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{i+3}\right)$

Die Summe der Reihe (2a) beträgt $\frac{2}{3}C+\frac{2}{3}\ln i$ und diejenige von (2b) $\frac{4}{3}C-\frac{22}{9}+\frac{4}{3}\ln(i+3)$. Durch Addition dieser beiden Summen, ergibt sich die Summe von (2): $2C-\frac{22}{9}+\frac{2}{3}\ln i+\frac{4}{3}\ln(i+3)$.

Da die ursprüngliche Reihe durch Subtraktion in zwei Reihen aufgeteilt wurde, erhält man die gesucht Summe ebenfalls durch Subtraktion:

$$C+\ln i+\ln(i+3)-\ln 2-2C+\frac{22}{9}-\frac{2}{3}\ln i-\frac{4}{3}\ln(i+3)=$$

$$=-C+\frac{1}{3}\ln i-\frac{1}{3}\ln(i+3)-\ln 2+\frac{22}{9}=-C-\ln 2+\frac{22}{9}$$

In Zusammenhang mit der obigen Reihe von ln2 tritt auch erstmals ein Konvergenzkriterium auf: „*Eine Reihe <u>konvergiert</u> dann und nur dann, wenn der Reihenrest nach einem „unendlichsten“ Gliede stets unendlich klein ist*.“[55] Dadurch erkennt Euler, dass diese Reihe (ln2) konvergiert, denn das unendlich große *i* ist vernachlässigbar, woraus folgt, dass $\ln 2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Oder: „*Reihen, deren Glieder beständig kleiner werden und schließlich zur Gänze verschwinden, heißen <u>konvergent</u>*.“[56] Demnach müsste auch die harmonische Reihe konvergieren, aber die erste Definition liefert, dass sie nicht konvergiert[57]:

Die allgemeine Form der harmonischen Reihe $\frac{c}{a},\frac{c}{a+b},\frac{c}{a+2b},\frac{c}{a+3b},\ldots$ wird zunächst ins Unendliche bis zum *i*-ten Term fortgesetzt: $\frac{c}{a+(i-1)b}$. Dann wird sie bis zum (*n·i*)-ten Glied $\frac{c}{a+(ni-1)b}$ betrachtet. Die Anzahl der hinzugefügten Glieder ist also (*n* – 1)*i*.

$$\sum_{i+1}^{ni}<\frac{(n-1)ic}{a+ib},\sum_{i+1}^{ni}>\frac{(n-1)ic}{a+(ni-1)b}$$

Da *i* unendlich groß, ist *a* im Nenner vernachlässigbar:

$$\sum_{i+1}^{ni}<\frac{(n-1)c}{b},\sum_{i+1}^{ni}>\frac{(n-1)c}{nb}$$

[55] König G.: „Konzepte des mathematischen Unendlichen im 19. Jahrhundert“, Seite 13

[56] Euler L.: „Commentationes analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes (volumen primum)“, Seite 586

[57] vgl. derselbe, Seite 587

Diese Summe ist endlich, daher ist die bis ins Unendliche fortgesetzte Reihe unendlich groß, sie divergiert.

Ein Beispiel für eine konvergente Reihe bildet dagegen:

$\sum \frac{1}{k^{\alpha}}$ für $\alpha \in$ R und $\alpha > 1$. Ist μ unendlich groß, so gilt:

$$\sum_{k>\mu} \frac{1}{k^{\alpha}} \leq \underbrace{\sum_{k=\mu+1}^{2\mu} \frac{1}{k^{\alpha}}}_{\substack{\text{jedes Glied} \\ \text{ist kleiner} \\ \text{als } \frac{1}{\mu^{\alpha}}}} + \underbrace{\sum_{k=2\mu+1}^{4\mu} \frac{1}{k^{\alpha}}}_{\substack{\text{jedes Glied} \\ \text{ist kleiner} \\ \text{als } \frac{1}{(2\mu)^{\alpha}}}} + \cdots$$

$$\Rightarrow 0 < \sum_{k>\mu} \frac{1}{k^{\alpha}} < \frac{\mu}{\mu^{\alpha}} + \frac{2\mu}{(2\mu)^{\alpha}} + \frac{4\mu}{(4\mu)^{\alpha}} + \cdots = \frac{1}{\mu^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{\left(2^{\alpha-1}\right)^{2}} + \right)$$

$$= \frac{1}{\mu^{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} \approx 0$$

Diese Reihe konvergiert also.

Euler gibt aber auch ein allgemeines Konvergenzkriterium an: „*Eine Reihe, die ins Unendliche fortgesetzt eine endliche Summe besitzt, wird auch dann, wenn man sie durch Verdopplung der Anzahl der Glieder weiter fortsetzt, keinen Zuwachs erhalten, sondern das, was man in Gedanken nach dem Unendlichen hinzufügt, wird in Wirklichkeit unendlich klein sein. Wäre dies nicht so, dann wäre die Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe nicht bestimmt und daher auch nicht endlich*.“[58]

Divergent sind Reihen dann, wenn die Glieder nicht gegen Null streben oder nie eine bestimmte Grenze „unterschreiten“ oder bis ins Unendliche wachsen. Ein typisches Beispiel für eine divergente Reihe ist: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ... Haben alle Glieder gleiche Vorzeichen, so kann die Summe nach Eulers Meinung immer durch $\frac{a}{0}$ dargestellt werden. Denn: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^{2} + x^{3} + \ldots$

Setzt man hier $x = 1$, so ergibt sich:

$$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Euler meint auch, dass Reihen, in denen nur positive Glieder addiert werden, keine negative Summe haben können und bezeichnet solche Reihen als „absurd“.

[58] Euler L.: „Commentationes analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes (volumen primum)“, Seite 88

<u>Beispiel</u>: Wird der Bruch $\frac{1}{1-x}$ in eine Reihe entwickelt:

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ und setzt man x = 2 bzw. x = 3, erhält man:

-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... bzw.

$-\frac{1}{2}$ = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + ...

Man darf daher die Reste der Division nicht vernachlässigen. Also:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

usw.

Wer also $1 + x + x^2 = \frac{1}{1-x}$ setzt, irrt sich um $\frac{x^3}{1-x}$. Es ist nur dann zulässig, wenn x eine Zahl kleiner 1 ist. Denn allgemein:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^\infty = \frac{1}{1-x} + \frac{x^\infty + 1}{1-x}$$

Ist x eine Zahl kleiner 1, so wird $\frac{x^\infty + 1}{1-x}$ unendlich klein, also Null.

Ein weiterer wichtiger Beitrag Eulers sind die Reihenentwicklungen von Sinus, Cosinus und die Beziehung zwischen diesen Winkelfunktionen und der EULERschen Zahl e. Die Reihenentwicklung von sin und cos erhält er aus der Formel von Moivre $(\cos z \pm i \sin z)^n = \cos nz \pm i \sin nz$ durch Addition bzw. Subtraktion[59]:

(a) $\cos nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n + (\cos z - i \sin z)^n}{2}$

(b) $\sin nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin z)^n}{2i}$

Die Zähler können nun mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes in Reihen entwickelt werden. Durch Rückeinsetzen und Zusammenfassen erhält man:

$$\cos nz = (\cos z)^n - (\cos z)^{n-2} (\sin z)^2 \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + (\cos z)^{n-4} (\sin z)^4 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots$$
$$\sin nz = (\cos z)^{n-1} (\sin z) n - (\cos z)^{n-3} (\sin z)^3 \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$$

[59] Euler schreibt hier für i noch $\sqrt{-1}$.

$$+(\cos z)^{n-5}(\sin z)^5\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdots$$

Dies sind endliche Reihen. Um nun eine unendliche Reihe zu erhalten, ersetzt Euler *n* durch eine unendliche große Zahl *N*. Wählt man den Bogen *z* nun unendlich klein, so dass *Nz* = *v*, wo *v* endlich ist, und berücksichtigt, dass sin *z* = *z* und cos *z* = 1, so erhält man:

$$\cos v = 1 - 1\cdot z^2\,\frac{N(N-1)}{1\cdot 2} + 1\cdot z^4\,\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$$
$$= 1 - \frac{v^2}{N^2}\,\frac{N(N-1)}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{N^4}\,\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdots$$

$$\sin v = 1\cdot z\cdot N - 1\cdot z^3\,\frac{N(N-1)(N-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + 1\cdot z^5\,\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdots$$
$$= v - \frac{v^3}{N^3}\,\frac{N(N-1)(N-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{N^5}\,\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdots$$

Da *N* unendlich groß ist, nimmt Euler folgende „Vereinfachungen“ vor:

$$\frac{N(N-1)}{N^2} = \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N} = 1$$
$$\frac{N(N-1)(N-2)}{N^3} = \frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-2}{N} = \left(1-\frac{1}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{N}\right) = 1\cdot 1 = 1$$

usw.

Durch Vereinfachung ergibt sich:

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \frac{v^6}{6!} + \cdots$$
$$\sin v = v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \frac{v^7}{7!} + \cdots$$

Mit Hilfe der gleichen Substitution wie vorhin, nämlich *Nz* = *v* $\Rightarrow$ $z = \frac{v}{N}$, erhält man unter Berücksichtigung von $\sin z = \frac{v}{N}$ und cos *z* =1 in den Ausgangsgleichung (a) und (b):

$$\cos v = \frac{\left(1+\frac{vi}{N}\right)^N + \left(1-\frac{vi}{N}\right)^N}{2}$$
$$\sin v = \frac{\left(1+\frac{vi}{N}\right)^N - \left(1-\frac{vi}{N}\right)^N}{2i}$$

Die EULERsche Zahl *e* ist definiert durch (in Eulers Schreibweise): $e^z = \left(1+\frac{z}{i}\right)^i$,

wobei *i* unendlich groß ist. Heute würden wir schreiben: $e^z = \lim_{i\to\infty}\left(1+\frac{z}{i}\right)^i$. Ersetzt man nun die Klammerausdrücke durch Ausdrücke in *e*, ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\cos v = \frac{e^{vi} + e^{-vi}}{2}$$
$$\sin v = \frac{e^{vi} - e^{-vi}}{2i}$$

bzw. durch Umformung:

$$e^{vi} = \cos v + i \sin v \qquad e^{-vi} = \cos v - i \sin v$$

Euler schreibt dazu: „*Hieraus ist ersichtlich, wie* ***die imaginären Exponentialgrössen auf die Sinus und Cosinus reeller Bogen zurückgeführt*** *werden können. Es ist nämlich:*
$e^{v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\sin v$ *und* $e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1}\sin v$.“[60]

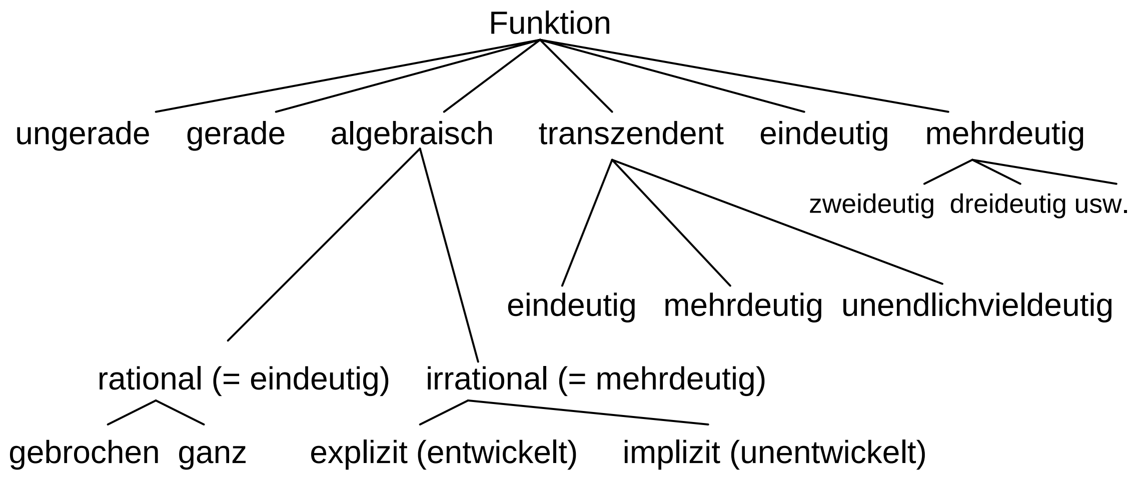
Bei Reihen von endlichen Größen war die Stellung der 0 bzw. des unendlich Großen nicht klar. Betrachtet man z. B. folgende Reihen:

(1) …, –3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …
(6) $\cdots -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$

Bei der ersten Reihe ist die 0 der Übergang vom Positiven zum Negativen. Daraus schloss man, dass die negativen Zahlen kleiner als 0 seien. Bei der zweiten Reihe ist das unendlich Große der Übergang und man schloss analog, dass die negativen Zahlen größer als das Unendliche seien. Euler meint nun dazu, dass dies eine voreilige Schlussweise sei, denn betrachtet man die Quadrate der positiven und negativen Zahlen in beiden Reihen, so ist im ersten Fall die 0 zwischen 1 und 1 und im zweiten Fall das unendlich Große ebenfalls zwischen 1 und 1. Hier würde also niemand behaupten, dass die positiven Glieder links „vom Unendlichen“ größer als dieses wären.

Im 1748 erschienen Werk „*Introductio in analysis infinitorum*“ (2 Bände) versucht Euler dem Leser den Begriff des Unendlichen näher zu bringen. Ziel der Analysis des Unendlichen ist es für Euler, Funktionen auf algebraischem Weg einzuführen, d.h. ohne Differenzialrechnung. Fasst man die elementaren Funktionen als Polynome unendlichen Grades auf, so können algebraische Methoden angewandt werden. Euler unterscheidet verschiedene Funktionen[61], die in folgendem Schema dargestellt sind:

[60] Euler L.: „Einleitung in die Analysis des Unendlichen“, Seite 106
[61] Für Euler ist eine Funktion einer veränderlichen Größe ein analytischer Ausdruck. Eine veränderliche Zahlengröße ist eine allgemeine Zahlengröße, die sämtliche bestimmte Werte annehmen kann, d.h. auch Null oder imaginäre Zahlen. Der analytische Ausdruck ist aus konstanten Zahlgrößen zusammengesetzt.



<u>algebraische Funktion</u>: nur algebraische Operationen sind erlaubt: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren, Radizieren
<u>transzendente Funktion</u>: nur transzendente Operationen sind erlaubt: Bildung von Exponential– und logarithmischen Größen, Integralrechnung. Die transzendente Operation muss aber die veränderliche Größe direkt betreffen.
<u>eindeutige Funktion</u>: jedem bestimmten Wert von *x* entspricht genau ein Wert *y*
<u>mehrdeutige Funktion</u>: jedem bestimmten Wert von *x* entsprechen mehrere Werte *y*, d.h. ist die Funktion <u>zweideutig</u>, ergeben sich zwei Werte, ist sie <u>dreideutig</u>, ergeben sich drei Wert usw.

In der „*Einleitung in die Analysis des Unendlichen*“ schreibt Euler am Beginn des Kapitels 4 „Von der Darstellung der Functionen durch unendliche Reihen“, Seite 49, folgendes: „*Da die gebrochenen und irrationalen Functionen von z nicht unter der Form A + Bz + Cz² + Dz³ + … enthalten sind, wenn die Anzahl der Glieder eine endliche ist, so pflegt man **ins Unendliche fortlaufende Ausdrücke derselben Art zu suchen**, um den **Wert** irgend einer **gebrochenen** oder **irrationalen** Function darzustellen. Ja es dürfte sogar die Natur transcendenter Functionen besser zu erkennen sein, sobald dieselbe in einer solchen, wenn auch ins Unendliche fortlaufenden Form ausgedrückt sind*.“ Um die „Natur der Funktion“ zu erkennen oder sie sich besser vorstellen zu können, ist es vor allem bei gebrochenen oder rationalen Funktion besser, sie in eine Potenzreihe zu entwickeln

<u>Beispiel</u>: Der Bruch $\frac{a}{\alpha + \beta z}$ wird durch Division in eine unendliche Reihe entwickelt werden: $\frac{a}{\alpha} - \frac{a\beta z}{\alpha^2} + \frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3} - \frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4} + \cdots$

Dies ist eine geometrische Reihe mit $q = -\frac{\beta z}{\alpha}$. Handelt es sich bei der Funktion um eine gebrochene mit mehreren Gliedern in Zähler und Nenner, kann dieser

Im Werk „Institutiones calculi differentialis“ (1755) ändert er seinen Funktionsbegriff. Eine Funktion bezeichnet nun den Zusammenhang einer abhängigen von einer unabhängigen Variablen. Dies entspricht unserer heutigen Definition einer analytischen Funktion.

Weg sehr mühsam werden. Hier ist es besser, die Methode der unbestimmten Koeffizienten zu verwenden. Dies soll an der obigen geometrischen Reihe veranschaulicht werden:

Man betrachtet die Reihe zuerst als unbekannt:

$$\frac{a}{\alpha + \beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots$$

Die Koeffizienten *A, B, C,* usw. sind gesucht.

$$\begin{aligned} a &= (\alpha + \beta z)\left(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots\right) \\ a &= \alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \dots \\ &\quad + \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \dots \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$a = \alpha A \Rightarrow A = \frac{a}{\alpha}$$

$$\alpha B + \beta A = 0 \Rightarrow B = -\frac{\beta A}{\alpha} = -\frac{\beta a}{\alpha^2}$$

usw.

Dies verallgemeinert Euler auf Brüche, die einen *n*-gliedrigen Ausdruck im Nenner haben. Dann erhält man irgendeinen Koeffizienten durch die (*n*-1) vorhergehenden (rekurrente Reihen). Wichtig ist jedoch, wenn man Reihen dieser Art bildet, dass das konstante Glied im Nenner ungleich Null ist.

3.5.2 Differenzial- und Integralrechnung

Denkt Newton noch in Bewegungsabläufen und erklärt Leibniz das Differenzial durch Tangenten, so arbeitet Euler ohne kinematische und geometrische Vorstellungen. Grundlage ist einzig und allein der Funktionsbegriff. Was die Differenzialrechnung überhaupt ist, beschreibt er in den „*Institutiones calculi differentialis*" (1755) in folgender Weise: „*Die Differenzialrechnung ist die Methode, das Verhältnis der verschwindenden Incremente zu bestimmten, welche die Funktionen veränderlicher Größen bekommen, wenn die veränderliche Größe, wovon sie Funktionen sind, um ein verschwindendes Increment vermehrt worden*."[62] Diese Verhältnisse lassen sich durch endliche Größen ausdrücken. Die verschwindenden Zuwächse sind die Differenziale, die in der Rechnung gleich Null gesetzt werden. Das Verhältnis dieser Zuwächse ergibt dann eine endliche Größe. Dass die Differenziale wirklich (aktual) gleich Null sind und nicht etwa unendlich klein, folgert er aus den richtigen Ergebnissen. Der Differenzialquotient besteht daher auch aus einer Null im Zähler und einer Null im Nenner, hat aber dennoch einen endlichen Wert.

„*Überhaupt aber ist das Differenzial jeder veränderlichen Größe dasjenige, was sich zwischen zweyen so nahe einander liegenden Werthen derselben denken*

[62] Euler L.: „Differentialrechnung", Seite LIV, Inkremente sind Differenzialien

läßt, daß man diese Werthe einander nicht näher bringen kann, ohne dadurch beyde Werthe in einen Einzigen zu verwandeln."[63]

Wie verhält sich eine Funktion von x, wenn x um eine unendlich kleine Größe ω vergrößert oder verkleinert wird? In den meisten Fällen birgt die Beantwortung dieser Frage keine Schwierigkeiten, z. B. wird x um ω vergrößert, so vergrößert sich x^2 um $2x\omega + \omega^2$, d.h.

$$x : x^2 = \omega : (2x\omega + \omega^2) = 1 : (2x + \omega)$$

$1 : (2x + \omega)$ nähert sich nun um so mehr an $1 : 2x$, wenn ω kleiner wird. $1 : (2x + \omega) = 1 : 2x$ gilt aber erst, wenn $\omega = 0$. Nun erläutert Euler, warum dies zulässig ist.

Er vergleicht x und x^2 mit zwei vermögenden Personen. A hatte x, während B x^2 hatte. Beide vermehrten ihr Kapital dadurch, dass sie gleichzeitig vermehrt wurden und jeder bekam so viele ω als er vorher x hatte. Die Inkremente der beiden Vermögen stehen nun in dem Verhältnis $\omega : (2x\omega + \omega^2)$ oder $(2x + \omega) : 1$. Nun wird angenommen, dass die Geldquelle von A und B versiegt. Wie verhalten sich ab diesem Zeitpunkt dann die Inkremente von A und B? „*Dann fallen die Incremente, also auch das Verhältnis zwischen ihnen, und folglich sogar die Frage weg*."[64] Der Zuwachs von x^2 hat dennoch zu x das Verhältnis $2x : 1$.

Die Regeln deuten zwar darauf hin, dass man die verschwindenden Inkremente bestimmt, aber in Wirklichkeit nur das Verhältnis zwischen ihnen. Das Inkrement von x^2 ist gleich $2x\omega$. ω wird in der Differenzialrechnung durch dx ausgedrückt und heißt Differenzial von x. Genauso kann man nun zeigen, dass $3x^2dx$ das Differenzial von x^3 ist oder allgemein, dass das Differenzial von x^n gleich $nx^{n-1}dx$ ist. Weiter schreibt Euler: „*Denn eigentlich hat man alsdenn, wenn das Verhältniß zweyer verschwindenden Incremente durch eine Funktion ausgedruckt, und nun das Increment dieser Funktion mit andern verglichen wird, ein zweytes Differenzial und gelangt ferner auf ähnlichem Wege zu dem dritten und den folgenden, so daß man sich im Grunde immer mit endlichen Größen beschäftigt, und bloß der Bequemlichkeit wegen die Differenzialien mit besonderen Zeichen bezeichnet*."[65]

Gegeben sei eine beliebige Funktion y von x. Für x werden nun nacheinander die Werte x, $x + \omega$, $x + 2\omega$, $x + 3\omega$ usw. eingesetzt. Die dadurch erhaltenen Funktionswerte werden mit y^I, y^{II}, y^{III}, usw. bezeichnet. Die arithmetische Reihe der x, $x + \omega$, $x + 2\omega$, $x + 3\omega$ usw. kann bis ins Unendliche fortgeführt werden, genauso wie die Reihe der y^I, y^{II}, y^{III}, usw. Ist $y = x$ oder $y = ax + b$, so ist die erhaltene Reihe ebenfalls eine arithmetische. Ist $y = \frac{a}{bx + c}$, so wird die Reihe eine harmonische und ist schließlich $y = a^x$, wird die Reihe geometrisch.

Um die Glieder der Reihe y^I, y^{II}, y^{III}, usw. zu unterscheiden, so soll: $y^I - y = \Delta y; y^{II} - y^I = \Delta y^I; y^{III} - y^{II} = \Delta y^{II};$ usw. Δy gibt also den Zuwachs der Funktion y an, wenn x um ω vermehrt wird. Somit ergibt sich aus der Reihe der

[63] derselbe, Seite XLII
[64] derselbe, Seite LI
[65] derselbe, Seite LXXIIIf

Werte von y, nämlich y^I, y^{II}, y^{III}, usw., die Reihe der Differenzen Δy, Δy^I, Δy^{II}, usw. Aus diesen Differenzen erhält man die zweiten Differenzen ebenfalls wieder durch Subtraktion:

$$\Delta\Delta y = \Delta y^I - \Delta y$$
$$\Delta\Delta y^I = \Delta y^{II} - \Delta y^I$$
$$\Delta\Delta y^{II} = \Delta y^{III} - \Delta y^{II}$$
usw.

Setzt man dieses Verfahren fort, gelangt man zu den dritten, vierten, usw. Differenzen. Einfacher ist es, wenn man die folgenden Differenzen aus der Reihe y^I, y^{II}, y^{III}, usw. erhält: Da $\Delta y^I = y^{II} - y^I$ ist $\Delta\Delta y = y^{II} - 2y^I + y$ und $\Delta\Delta y^I = y^{III} - 2y^{II} + y^I$ und daher $\Delta^3 y = \Delta\Delta y^I - \Delta\Delta y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^I - y$ usw. Es ist leicht zu erkennen, dass die Koeffizienten den Koeffizienten von Binomen entsprechen.

Ist eine zusammengesetzte Funktion gegeben, so gilt: die „Differenz" der Funktion entspricht der Summe der „Differenzen" der einzelnen Teile.

Wenn x um ω wächst, kann y^I ausgedrückt werden durch:
$y^I = y + P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \ldots$, P, Q, R, … sind Funktionen von x

Daher folgt:
$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \ldots$$

Da die hinteren Glieder gegenüber dem ersten verschwinden, folgt $\Delta y = P\omega$. Daraus folgt, dass die Analysis des Unendlichen ein Spezialfall der Lehre der Differenzen ist.

Euler übernimmt dann die Bezeichnungen von Leibniz, d.h. Δ wird zu d und $\omega = dx$ = unendlich kleine Differenz. Diese unendlich kleinen Differenzen sind die Differenziale, daher auch der Name Differenzialrechnung. (Die unterschiedlichen Bezeichnungen werden von mir synonym verwendet.)

Von vorhin gilt: $dy = Pdx$
Daher $\frac{dy}{dx}\left[=\frac{0}{0}\right] = P$ - dennoch gibt es ein endliches Verhältnis: $dy : dx = P : I$

$$y = x^n$$
$$y^I = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx^2 + \ldots$$
$$dy = y^I - y = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx^2 + \ldots$$
Die hinteren Glieder verschwinden gegenüber dem ersten, daher ist $nx^{n-1}dx$ das Differenzial von x^n, Euler schreibt $d.x^n = nx^{n-1}dx$ – der Punkt bedeutet, dass sich das Differenzial auf x^n bezieht. Diese Regel gilt auch für negative und gebrochene Exponenten.

Später unterscheidet Euler zwischen unendlich kleinen Zuwächsen von Funktionen und Differenzialen. Der Zuwachs ist dabei das „wahre Differenzial". Sei *y* eine Funktion von *x* und *x* geht über in *x + dx*, dann wird *y* zu (mit dem Satz von Taylor):

$$y + dx\frac{dy}{dx} + \frac{dx^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dx^3}{6}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots = y + dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{6}d^3y + \cdots$$

D.h. $dy = dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{6}d^3y + \cdots$

Setzt man *dy = p dx, dp = q dx, dq = r dx* usw., folgt

$$dy = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \frac{1}{24}sdx^4 + \cdots$$

Alle Glieder mit höheren Differenzialen verschwinden, da sie unendlich klein sind, was bedeutet, dass das „wahre Differenzial" *dy = p dx* ist. Sollte dieser Wert gleich Null sein (für ein bestimmtes *x*), so wird $\frac{1}{2}qdx^2$ zum „wahren Differenzial" usw.

Hier wird das Differenzial nicht durch Weglassen der unendlich kleinen Größen gewonnen. Vielmehr ist die Differenz $f(x + dx) - f(x)$ für $x \to a$ und $dx \to 0$ zu untersuchen. Dies ist in weiterer Folge bei transzendenten Funktionen wichtig.

3.5.3 Anwendung der Differenzialrechnung zum Auffinden von Reihensummen

Hat man eine Reihe mit der unbestimmten Größe *x* und kennt deren Summe, so kann man *x + dx* für *x* setzen. Die so entstehende Summe ist gleich „*der Summe der ersten Reihe nebst ihrem Differenziale, und folglich das Differenzial der Summe auch gleich dem Differenziale der Reihe*."[66] Dividiert man nun noch durch *dx*, findet man eine neue Summe, deren Reihe ebenfalls bekannt ist:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$ / differenzieren

$$\frac{dx}{(1-x)^2} = dx + 2xdx + 3x^2dx + 4x^3dx + \ldots$$ / : *dx*

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$ / differenzieren / : *dx*

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \ldots$$

usw.

Die Koeffizienten der letzten Reihe sind die Trigonalzahlen.
Wie die Differenzen in Differenziale übergehen, wenn man sie ins Unendliche verkleinert, so gehen die Summen in Integrale über. „*So wie also nunmehr das Differenzial einer endlichen Größe ein unendlich Kleines von der ersten Ordnung, und das Differenzial einer unendlich kleinen Größe von der ersten Ordnung ein*

[66] Euler L.: „Differenzialrechnung Zweyter Theil", Seite 25

unendlich Kleines von der zweyten Ordnung u.s.f. ist: so ist auch umgekehrt das Integral einer unendlich kleinen Größe der ersten Ordnung eine endliche Größe, das Integral einer unendlich kleinen Größe von der zweyten Ordnung ein unendlich Kleines von der ersten Ordnung u.s.f.“[67] Integration geht also zurück bis zu einer endlichen Größe. Integriert man endliche Größen, so gelangt man zu unendlich großen Größen.

Die Integralrechnung ist dann die Methode, *„aus dem Verhältnisse der verschwindenden Incremente die Funktionen zu finden, von welchen sie dergleichen Incremente sind*.“[68]
Euler gibt an, dass man die ursprüngliche Funktion durch „rückwärts gehen“ erlangt. Man hat beispielsweise die Differenz einer Funktion berechnet, dann erhält man diese Differenz und soll auf die Funktion schließen, z.B.: Ist die Differenz $a\omega$, so weiß man, dass die gesuchte Funktion $ax + b$ heißen muss.

Die gesuchte Funktion soll Summe ($\sum$) heißen, da sie die Summe aus allen Werten ist, die der Differenz vorhergehen, z. B.:

$$y^{I} = y + \Delta y$$

$$y^{II} = y + 2\Delta y + \Delta\Delta y$$

$$y^{III} = y + 3\Delta y + 3\Delta\Delta y + \Delta^3 y$$

Die Koeffizienten ergeben sich wie erwähnt aus der Entwicklung eines Binoms. Daher:

$$y^{(n)} = y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y + usw.$$

Daher kann man auch die Werte von y rückwärts fortsetzen.

„*Ist nemlich die Differenz einer Funktion y = z* [d.h. wird mit *z* bezeichnet, Anmerkung der Verfasserin]*, so ist z = Δy; und wenn y gegeben ist, so wissen wir, wie z gefunden wird. Wenn aber die Differenz z gegeben ist, und ihre Summe y gefunden werden soll, so wird y=∑z; und man findet y=∑z aus der Gleichung z = Δy, indem man den entgegenstehenden Weg nimmt*.“[69] Zum Schluss muss dann noch eine Integrationskonstante hinzugefügt werden.

Beispiele:

(1) $\sum \omega = x$ daher ist $\sum I = \frac{x}{\omega}$

(2) $\sum\left(2\omega x + \omega^2\right) = x^2 = \sum\left(2\omega x\right) + \sum\left(\omega^2\right) = 2\omega\sum x + \omega x$ und

$\sum x = \frac{x^2}{2\omega} - \sum\frac{\omega}{2} = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}$

(3) $\sum\left(3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3\right) = x^3 = 3\omega\sum x^2 + 3\omega^2\sum x + \omega^3 x$

[67] Euler L.: „Differenzialrechnung Erster Theil“, Seite 121
[68] Euler L.: „Differentialrechnung“, Seite LVII
[69] Euler L.: „Differentialrechnung“, Seite 27

Daher: $\sum x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \omega \sum x - \frac{\omega^2}{3} \sum I = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6}$

Führt man dies immer weiter fort, gelangt man zu sämtlichen Summen von x^n. $\sum x^n$ ist eine Summe von Gliedern, die mit x^{n+1}, x^n, x^{n-1} usw. beginnen. Das Glied x^{n+1} ist immer $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega}$. Für allgemeine Beispiele kann man auf diese Ergebnisse dann zurückgreifen:

Beispiel:

Gegeben ist die Differenz *ax² + bx + c*. Gesucht ist die dazugehörige Funktion. Zuerst werden nun die Summen der einzelnen Glieder der Differenz gesucht:

$$\sum ax^2 = \frac{ax^3}{3\omega} - \frac{ax^2}{2} + \frac{a\omega x}{6}$$

$$\sum bx = \frac{bx^2}{2\omega} - \frac{bx}{2}$$

$$\sum c = \frac{cx}{\omega}$$

Durch Zusammensetzen der Summen ergibt sich dann:

$$\sum \left(ax^2 + bx + c\right) = \frac{ax^3}{3\omega} - \frac{(a\omega - b)x^2}{2\omega} + \frac{\left(a\omega^2 - 3b\omega + 6c\right)x}{6\omega} + C$$

Auf die schwierigeren Methoden beim Integrieren komplizierter Funktionen sei hier nicht mehr eingegangen, da sie vom Thema abführen.

3. 6 Die Präzisierung der Grundbegriffe durch Augustin-Louis Cauchy

Cauchy (1789 – 1857) beschäftigte sich neben der Mathematik auch mit Physik und Mechanik. Er schrieb Lehrbücher zur Analysis, 1821 veröffentlichte er beispielsweise „*Cours d´analyse de l´École Royale polytechnique*“, worin er die Stetigkeit, unendliche Reihen und elementare Funktionen untersucht, aber keine Ableitungen oder Integrale. Durch die strengere Definition der analytischen Grundbegriffe bewirkte er die Reform der Analysis im 19. Jahrhundert. Dadurch, dass Cauchy Sätze und Definitionen der Analysis zum Teil nicht mehr mit Hilfe unendlich kleiner Größen formuliert – vielmehr verwendet er dann Aussagen über sämtliche Werte einer Variablen unterhalb beliebig klein gewählter Werte –, setzt er den ersten Schritt für die Arithmetisierung der Analysis. Weiters führt er das Integral ohne Bezugnahme auf das Differenzial ein.

Im oben angeführten Werk definiert Cauchy eine Größe als positiv oder negativ reell, jedoch nicht imaginär. Eine variable Größe kann nacheinander verschiedene Werte annehmen. Nähern sich die Werte unbegrenzt einem festen Wert, so ist dieser die Grenze (limite). Die Werte unterscheiden sich von der Grenze so wenig, wie man will. Mit dieser Definition legt er auch fest, was man unter einer unendlich kleinen Größen verstehen soll: dies ist eine Variable, deren Absolutbeträge unbegrenzt abnehmen – schließlich liegen sie unter jeder gegebenen Zahl. Die Grenze dieser Variablen ist 0.

Der erste Satz von Kapitel II (Seite 37) lautet: „*On dit qu´une quantité variable devient infiniment petite, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro*.“[70] („Man sagt, dass eine variable Größe unendlich klein wird, wenn ihr Absolutbetrag unbegrenzt abnimmt, um zu der Grenze Null zu konvergieren.“ Übersetzung der Verfasserin.) Die unendlich kleinen Größen sind also nichts anderes als gegen Null konvergierende Variablen.[71] In seinem Werk „*Leçons sur le calcul différentiel*“ aus dem Jahr 1829 spricht er auch von Systemen unendlich kleiner Größen, jedoch ohne dies näher zu erläutern. Cauchy neigt, wie Euler, dazu, die unendlich kleinen Größen wie reelle Zahlen zu benutzen.

Auch das unendlich Große wird „definiert“: Wenn die aufeinanderfolgenden Absolutbeträge jede gegebene Zahl übersteigen, so ist das positiv Unendliche (∞) die Grenze einer positiven Variablen und das negativ Unendlichen ($-\infty$) die Grenze einer negativen Variablen. Beides sind unendliche Größen.

Die Problematik des **Grenzwertes** ist bereits in der Exhaustionsmethode (siehe Kapitel 2.6) vorweggenommen. Immer mehr Mathematiker stellten sich in Opposition zu aktual-unendlichen Begriffsbildungen. Dazu kam der Versuch, den Infinitesimalkalkül von unendlich kleinen Größen zu reinigen. Das mündete in einer Arithmetisierung des Grenzwert- und Konvergenzbegriffes durch Cauchy: „*Wenn sich die aufeinanderfolgenden Werte, welche einer Variablen zugeschrieben werden, einem festen Wert unbeschränkt nähern, so daß sie von diesem schließlich so wenig wie gewünscht abweichen, dann heißt dieser letztere der Grenzwert aller anderen*.“[72] Seine Definition des Grenzwertes ist eine statische Definition, d.h. sie benutzt nicht die anschauliche Idee der Bewegung.

Die Definition der **Stetigkeit** erfolgt dagegen wieder mit Hilfe von unendlich kleinen Größen: Sei *f(x)* eine Funktion in (der Variablen) *x*. Die Werte von *x* sind in einem Intervall eindeutig und endlich. $f(x + \alpha) - f(x)$ ist abhängig von α und dem Wert von *x*. *f(x)* ist stetig im Intervall, wenn $f(x + \alpha) - f(x)$ für alle *x* im Intervall und α unbegrenzt abnimmt. „*En d´autres termes, la fonction f(x) restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même*.“[73] („ Mit anderen Worten, die Funktion *f(x)* bleibt zwischen den gegebenen Grenzen von *x* stetig, wenn, zwischen diesen Grenzen ein unendlich kleiner Zuwachs der Variablen immer einen unendlich kleinen Zuwachs der Funktion selbst erzeugt.“ Übersetzung der Verfasserin)

Auch bei der Definition der Konvergenz verwendet Cauchy infinitesimale Größen: Die Reihe (heute: Folge) $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$ konvergiert genau dann, wenn für

---

[70] Laugwitz D.: „Zahlen und Kontinuum“, Seite 212

[71] Die Interpretation Cauchys in diesem Zusammenhang führte zu heftigen Streitigkeiten unter den Mathematikern. Es ist nicht gesichert, ob Cauchy die unendlich kleinen Größen mit Nullfolgen gleichsetzte oder nicht.

[72] König G.: „Konzepte des mathematisch Unendlichen im 19. Jahrhundert“, Seite 20

[73] Laugwitz D.: „Zahlen und Kontinuum“, Seite 214

wachsende Werte von *n* die Summe $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ unbeschränkt gegen eine feste Grenze *s* konvergiert. D.h. für unendlich große Werte von *n* unterscheiden sich die Summen $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ von der Grenze *s* nur um eine unendlich kleine Größe.
Weiters beschäftigt sich Cauchy mit Funktionen in einer Variablen und formuliert folgenden Satz (1821): Sind $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}$ Funktionen einer Variablen *x* und sind die Glieder dieser Reihe in der Nähe eines bestimmten Wertes von *x*, für den die Reihe konvergiert, stetig bezüglich *x*, dann ist die Summe der Reihe in der Nähe dieses bestimmten Wertes *x* eine stetige Funktion von *x*.

In heutiger Terminologie: Die Grenzfunktion jeder konvergenten Reihe stetiger Funktionen ist stetig. Dieser Satz ist (heute) falsch. Für die Begrifflichkeiten von Cauchy ist er aber richtig, aufgrund seiner Definitionen von Stetigkeit und Konvergenz. Dies zeigt der folgende Beweis:[74]

Seien

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$
$$r_n = u_n + u_{n+1} + \cdots$$
$$s = s_n + r_n$$

drei Funktionen in *x*. D.h. Cauchy zerlegt $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \cdots$ in $s = s_n + r_n$. Da es sich hier um Funktionen handelt, kann man auch schreiben: $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$.
Zu zeigen ist nun, dass *s* bei *x* stetig ist, d.h. für ein unendlich kleines α muss $s(x+\alpha) - s(x)$ unendlich klein sein:

$$\begin{aligned} s(x+\alpha) - s(x) &= \left(s_n(x+\alpha) + r_n(x+\alpha)\right) - \left(s_n(x) + r_n(x)\right) \\ &= \left(s_n(x+\alpha) - s_n(x)\right) + \left(r_n(x+\alpha) - r_n(x)\right) \end{aligned}$$

- $s_n(x+\alpha) - s_n(x)$ ist für alle *n* unendlich klein:
  Angenommen *n* ist endlich, dann folgt:
  $$\begin{aligned} s_n(x+\alpha) - s_n(x) &= u_0(x+\alpha) + u_1(x+\alpha) + \cdots + u_{n-1}(x+\alpha) - \left[u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_{n-1}(x)\right] \\ &= \left[u_0(x+\alpha) - u_0(x)\right] + \left[u_1(x+\alpha) - u_1(x)\right] + \cdots + \left[u_{n-1}(x+\alpha) - u_{n-1}(x)\right] \end{aligned}$$

  Da alle u_i stetig sind, ist dies eine endliche Summe unendlich kleiner Werte, also unendlich klein. Cauchy folgert nun: Was für endliche natürliche Zahlen gilt, gilt auch für unendlich große natürliche Zahlen. Damit also die obige Aussage gilt, muss man nur ein unendlich großes *n* finden, für das die Aussage wahr ist.

- $r_n(x+\alpha) - r_n(x)$ wird mit $r_n(x)$ unendlich klein, da nach Cauchys Konvergenzdefinition $r_n(x)$ und $r_n(x+\alpha)$ für unendlich große *n* unendlich klein werden.

$\Rightarrow$ $s(x+\alpha) - s(x)$ ist unendlich klein und daher ist *s* bei *x* stetig.

□

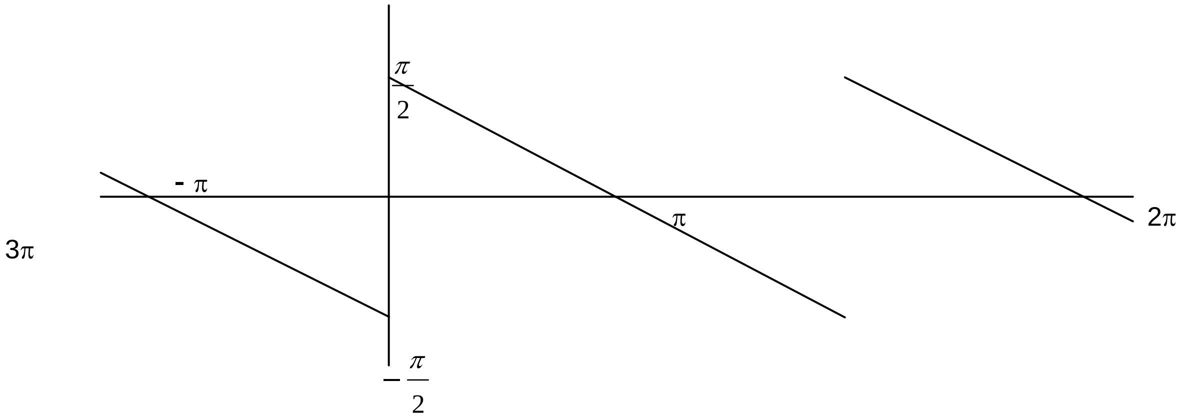
[74] siehe Spalt D.: „Vom Mythos der Mathematischen Vernunft", Seite 42ff

Konvergenz bedeutet für Cauchy eben, dass der Reihenrest r_n für unendlich große n unendlich klein wird. An folgendem Beispiel[75] sei die Problematik verdeutlicht:

<u>Beispiel</u>:

Gegeben sei die Reihe $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots$

Die Grenzfunktion hat die Gestalt



ist also offensichtlich unstetig, obwohl die einzelnen Summanden stetig sind. Cauchy zeigt aber, dass diese Reihe nicht überall konvergiert: Für Werte, die nahe bei 0 liegen, z. B. $\frac{1}{n}$ mit n sehr groß, kann der Reihenrest beträchtlich von 0 abweichen. Der Reihenrest kann nämlich durch folgende Summe dargestellt werden (an der Stelle $x = \frac{1}{n}$):

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(n+k)x}{n+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(n+k) \cdot \frac{1}{n}}{(n+k) \cdot \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

Den Wert des Reihenrestes berechnet Cauchy so: Wählt man n unendlich groß, dann reduziert sich der Reihenrest r_n „im wesentlichen“ zum Integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{5} + \cdots$$
$$= 0{,}6244\ldots$$

Das bedeutet, dass der Reihenrest r_n an der Stelle $\frac{1}{n}$ einen endlichen Wert hat. Für die Konvergenz der Reihe wäre allerdings ein unendlich kleiner Wert notwendig, daher divergiert sie an dieser Stelle.

[75] siehe Spalt D.: „Vom Mythos der Mathematischen Vernunft“, Seite 57

Zur Prüfung der Konvergenz einer Folge mit konstanten Gliedern formulierte Cauchy bereits das Wurzel-, Quotienten und Majorantenkriterium. Diese werde ich in der modernen Schreibweise (aber ohne Beweis) wiedergeben:

<u>Wurzelkriterium</u>:

(v) Sei 0 < q < 1, $|a_k| \le q^k$ für $k \ge m$ $\Rightarrow \sum a_k$ konvergiert.

(vi) lim sup $\sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow \sum a_k$ konvergiert.

(vii) lim sup $\sqrt[k]{|a_k|} > 1 \Rightarrow \sum a_k$ divergiert.

<u>Quotientenkriterium</u>:

(iv) Existiert ein q mit 0 < q < 1, so dass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q$ für $k \ge n$ $\Rightarrow \sum a_k$ konvergiert.

(v) Existiert ein n, so dass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ge 1$ für $k \ge n$ $\Rightarrow \sum a_k$ divergiert.

<u>Majorantenkriterium</u>:

Sei $|a_n| \le K \cdot b_n$ für alle $n \in$ **N**. Ist $\sum b_n$ konvergent, so ist $\sum a_n$ (absolut) konvergent.

Die Definitionen für Stetigkeit, Konvergenz und ähnliches wurden später von Weierstraß in die „Sprache der Epsilontik“ übersetzt. Epsilontik ist eine Scherzbezeichnung unbekannter Herkunft für die griechischen Buchstaben δ und ε. Diese dienen zur Darstellung von Infinitesimalbetrachtungen, in denen der Abstand zweier Punkte beliebig klein wählbar sein soll.

Heute lauten die Definitionen der Stetigkeit und des Grenzwertes so – hier wird das unendlich Kleine vermieden:

f ist stetig an einer Stelle x_0 des Definitionsbereiches, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Sei *f* definiert für $0 < |x - x_0| < a$. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass für $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

Schließlich sei noch die Definition des **Differenzials** bei Cauchy erwähnt. Es ist eine stetige Funktion von zwei reellen Variablen *x* und *dx*. Letztere kann, muss aber nicht unendlich klein sein. Wenn eine Funktion *f(x)* in einem Intervall stetig ist, dann gilt für infinitesimales $\Delta x = i$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$

Dieser Differenzenquotient hat in Zähler und Nenner unendlich kleine Größen, die sich dem Grenzwert Null nähern. Strebt dabei der Bruch einem Grenzwert zu, so stellt er $f'(x)$ dar.

Bezüglich des Integrals greift Cauchy die Leibnizsche Vorstellung des Integrals als Flächeninhalt wieder auf. Es wird durch Approximationen von Rechtecken definiert.

Ab Cauchy werden zwei Wege bei der Weiterentwicklung beschritten: die Grenzwertanalysis und die Infinitesimalmathematik, wobei erstere heute vorherrscht. Die Infinitesimalen werden erst seit Entdeckung der Non-Standard Analysis (siehe Kapitel 4.4.2) wieder akzeptiert.