Kapitel 4

Entwicklungen im 19. Jahrhundert

4.1 Bernhard Bolzano

Bolzano (1781 – 1848) studierte Philosophie, Theologie und Mathematik. 1805 promovierte er mit einer mathematischen Dissertation und erhielt die Priesterweihe. Danach übernahm er den Lehrstuhl für Religionslehre in Prag. Da er ein vernunftorientiertes Verständnis des Katholizismus und soziale Reformen forderte, wurde er 1819 aus seinem Amt enthoben. Danach widmete er sich ausschließlich seinen wissenschaftlichen Arbeiten.

Bolzanos Begriff der Unendlichkeit ist auf dem der Endlichkeit begründet, der wiederum auf dem Begriff der natürlichen (wirklichen) Zahl ruht. Er beschreibt das Unendliche als eine Beschaffenheit von Mengen und versucht auch Rechenregeln aufzustellen, und zwar mittels einer Bestimmung des Verhältnisses, das zwischen verschiedenen Unendlichkeiten besteht:

Die Reihe/Summe der natürlichen Zahlen kann man durch Einheiten (N^0) darstellen und durch die symbolische Gleichung beschreiben:

$$(1)\ 1^0 + 2^0 + 3^0 + ... + n^0 + (n + 1)^0 + ... = N^0$$

Bezeichnet man die Menge der natürlichen Zahlen ab (n + 1) durch N^n, erhält man die Gleichung:

$$(2)\ (n + 1)^0 + (n + 2)^0 + (n + 3)^0 + ... = N^n$$

Bildet man die Differenz, ergibt sich:

$$(3)\ N^0 – N^n = 1^0 + 2^0 + 3^0 + ... + n^0 = n$$

Daraus kann man das Verhältnis erkennen, das diese zwei unendlichen Größen zueinander haben. Um diesen Schluss ziehen zu können, muss allerdings schon eine Arithmetik des Unendlichen gegeben sein, was hier nicht der Fall ist.

Prinzipiell unterscheidet Bolzano zwei Arten des Unendlichen: einerseits als einen Begriff einer Eigenschaft eines Objektes bzw. einer Substanz, andererseits als eine Substantialisierung einer Eigenschaft, wie z. B. das Schöne oder das Gute. Da er der Meinung ist, dass das Unendliche nur durch Begriffe bestimmt werden kann, prüft er die bisherigen Begriffsbestimmungen und kommt zu dem Ergebnis, dass sie mangelhaft und ungenau sind. Bolzano kritisiert vor allem, dass das Unendliche von seiner quantitativen Bedeutung abgelöst wird und dass es in der Mathematik bisher nur unendlich kleine und unendlich große Größen gibt, sonst aber nichts unterschieden wird. Weitere Kritikpunkte an früheren Ansichten werden am Ende dieses Kapitels angeführt.

Bolzano gibt einige Beispiele von Unendlichkeiten: ein Körper als eine unendliche Menge von Teilen, der Raum als ein unendliches Ganzes aller Punkte oder der Zeitraum als unendlich viele Augenblicke. Das Unendliche findet sich aber auch im religiösen Bereich wieder: Gott ist unendlich, „*weil man ihn von einem Gesichtspunkt betrachten kann, von dem aus sich zeigt, daß er eine unendliche Menge enthält*."[1] Er ist vollkommen und hat alle Kräfte in sich. Weiters besitzt er Allwissenheit, d. h. eine unendliche Menge von Wahrheiten. Es gibt aber auch eine unendliche Menge von Geschöpfen von Gott. Letztere Behauptungen sind natürlich sehr problematisch und angreifbar, doch sollen sie Bolzanos Intention aufzeigen, das Unendliche auf dem Gebiet der Wirklichkeit nachzuweisen.

Gegen das Argument, dass man sich eine unendliche Menge nicht vorstellen kann, bringt Bolzano folgendes vor: es ist nicht notwendig, sich jeden einzelnen Teil der Menge vorzustellen, sondern nur den Inbegriff[2] all dieser Teile. In einem <u>Beispiel</u>: Man kann sich das Ganze der Bewohner Pekings vorstellen, ohne sich jeden einzelnen Bürger vorzustellen.

Was seine logische Analyse des Unendlichen betrifft, so geht sie in Richtung einer „*arithmetischen Operationalisierung des Unendlichen*"[3]: In der heutigen Mathematik wird das ontologische Grundparadigma verwendet, dass die Menge das elementarste Ding ist. Bolzano hingegen geht vom Paradigma aus, dass das elementarste Ding das Ganze sei. Ein mathematischer Gegenstand ist demnach ein konkretes Ganzes. Dieses ist von sich aus schon strukturiert und geordnet. Sieht man von dieser inneren Struktur ab, kommt man zum Begriff der Menge. Der heute verwendete Mengenbegriff ist dagegen höchstens durch Hinzunahme einer Struktur ein gegliedertes Ganzes.

Ein weiterer wichtiger Begriff bei Bolzano ist die Vielheit: Dies ist eine Menge, „*bei der die Teile der Teile als Teile des Ganzen selbst angesehen werden dürfen*"[4]. Die einfachsten Teile dieser Menge sind konkrete Einheiten. Ein <u>Beispiel</u>: eine Strecke ist keine Vielheit, wenn man sie aus Linien zusammengesetzt betrachtet. Sie wird aber zu einer, wenn man sie aus Punkten bestehend ansieht. Vielheiten sind Größen.

Unendlichkeit ist immer eine Beschaffenheit von Vielheiten, wobei es sich um eine konkrete Beschaffenheit handelt, die Gegenständen zukommt. Dadurch ist es möglich, dass derselbe Gegenstand in einer gewissen Hinsicht unendlich und in einer anderen endlich ist. „*Eine Vielheit von der Art A heißt unendlich, wenn sie so beschaffen ist, daß jede endliche Vielheit der Art A nur als Teil von ihr erscheint*."[5] Über den Begriff der unendlichen Vielheit versucht Bolzano dann das Unendliche selbst zu erklären.

---

[1] Bolzano B.: „Paradoxien des Unendlichen", Seite XIV*

[2] Ein Inbegriff eines gewissen Dinges, oder wie Bolzano auch sagt, ein aus Teilen bestehendes Ganzes, bezeichnet eine gegenseitige Einwirkung verschiedener Gegenstände. Eine Menge ist ein Inbegriff, bei dem es egal ist, wie seine Teile angeordnet sind.

[3] König: „Konzepte des mathematischen Unendlichen im 19. Jahrhundert", Seite 192

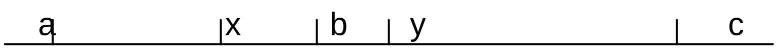
[4] derselbe, Seite 194

[5] derselbe, Seite 195

Gemäß Bolzano können zwei unendliche Mengen die Eigenschaft haben, dass sich jedes Element der einen Menge, mit einem Element der anderen verbinden lässt, ohne dass ein Element übrig bleibt oder doppelt genommen wird. Daraus folgt aber nicht, dass sie gleich sind: „*Wenn man zwei Mengen A und B von der Beschaffenheit hat, daß es für jedes Individuum in A ein eigenes in B und ebenso für jedes Individuum in B ein eigenes in A gibt: so folgt hieraus noch nicht, daß beide Mengen gleich sind. Sondern nur dann müssen sie dieses sein, wenn beide Mengen noch überdies endlich sind*.“[6] Dabei kann sogar die eine Menge Teilmenge der anderen sein.
Dass dies gilt, beweist Bolzano durch Beispiele:

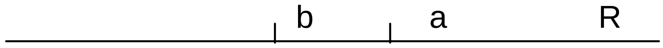
1. Man nehme beliebige Größen, z. B. 5 und 12. Bolzano sieht es als einleuchtend an, dass die Menge der (positiven reellen) Größen kleiner 5 und kleiner 12 unendlich ist. Es ist genauso gewiss, dass man die letzte Menge für größer ansieht. Genauso wahr ist auch das folgende: x sei eine Größe zwischen 0 und 5; das Verhältnis zwischen x und y (y ist eine Größe zwischen 0 und 12) werde durch die Gleichung $5y = 12x$ bestimmt. Dann gilt: wenn x zwischen 0 und 5 liegt, dann muss y zwischen 0 und 12 liegen und umgekehrt. Damit gibt es jeweils genau ein Zahlenpaar, das diese Gleichung erfüllt, „... *mit dem Erfolge, daß nicht ein einziges der Dinge, aus denen diese beiden Mengen bestehen, ohne Verbindung zu einem Paare bleibt und auch kein einziges in zwei oder mehreren Verbindungen auftritt*.“[7]

2. Seien *a, b, c* beliebige Punkte auf einer Geraden; das Verhältnis *ab* : *ac* sei beliebig, aber *ac* sei die größere Entfernung.



Die Menge der Punkte in *ab* und *ac* ist jeweils unendlich, trotzdem liegen in *ac* mehr Punkte, weil neben den Punkten von *ab* auch noch die Punkte von *bc* darin liegen. Ändert man das Verhältnis *ab* : *ac*, so ändert sich auch das Verhältnis der beiden Mengen.
Angenommen x ist ein Punkt auf *ab*. Dann wird durch das Verhältnis $ab : ac = ax : ay$, ein Punkt y in *ac* festgelegt. Genauso ist es umgekehrt: Ist y ein Punkt in *ac*, dann wird x, wenn *ax* aus *ay* nach derselben Gleichung bestimmt wird, ein Punkt in *ab* sein. Daher lässt sich zu jedem Punkt in *ab* ein Punkt in *ac* wählen, „*mit dem Erfolge, daß von den Paaren, die wir aus je zwei solchen Punkten bilden, behauptet werden kann, es sei kein einziger Punkt weder in der Menge der Punkte von ab, noch in der Menge der Punkte von ac, der nicht in einem dieser Paare erschiene, und auch kein einziger, der zwei - oder mehrmal daselbst erschiene*.“[8]

Es gibt aber Größer- und Kleiner-Beziehungen zwischen unendlichen Mengen. Dies demonstriert er ebenfalls an einem (geometrischen) Beispiel:



[6] Bolzano B.: „Paradoxien des Unendlichen“, Seite XV*
[7] Becker O.: „Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung“, Seite 276
[8] derselbe, Seite 277

Die Länge der Geraden, die über aR hinausläuft, ist unendlich. Aber die Gerade, die in derselben Richtung bis ins Unendliche läuft, und bei b beginnt, ist um das Stück ba länger. Dies stimmt also mit dem euklidischen Postulat überein, dass der Teil kleiner als das Ganze ist.

Die Menge der ganzen (= natürlichen) Zahlen ist unendlich. Bolzano verteidigt dieses Postulat gegen etwaige Vorwürfe der Art: Jede Zahl ist nach ihrem Begriff endlich. Wie kann also die Menge aller Zahlen unendlich sein, wenn sie doch nur aus endlichen Zahlen besteht? Bolzano meint dazu, dass dies ein Trugschluss sei, denn er betont ausdrücklich, dass es kein letztes Element/Glied in der Reihe der ganzen Zahlen gibt – dies wäre ein Widerspruch in sich. Das folgt eindeutig aus der Bolzano'schen Definition der ganzen Zahlen – jede hat einen Nachfolger. Wenn nun aber die Menge der ganzen Zahlen unendlich ist, muss auch die Menge aller Größen unendlich sein, denn es gibt mehr Größen als Zahlen – z. B. Brüche, irrationale Ausdrücke oder transzendente Größen wie *e* und π. Nun ist es auch kein Widerspruch mehr von unendlich großen bzw. kleinen Größen zu sprechen. Bolzano versteht unter einer unendlich großen Größe eine solche, „*bei der die einmal zugrunde gelegte Einheit als ein Ganzes erscheint, von welchem jede endliche Menge dieser Einheiten nur ein Teil ist*"; unter der unendlich kleinen Größe aber eine solche, „*bei der die Einheit selbst als ein Ganzes erscheint, von welchem jede endliche Vielheit dieser Größe nur einen Teil ausmacht*."[9] Die Menge aller Zahlen ist z. B. eine unendlich große Größe, nicht Zahl.

Bei Bolzano hat also das Unendliche die Bedeutung eines Ganzen, das aus unendlich vielen Teilen besteht. Doch nicht jede Größe, die aus einer Summe von unendlichen Mengen anderer endlicher Größen besteht, ist unendlich. Als Beispiel bringt Bolzano hier $\sqrt{2}$: einerseits kann dieser irrationale Ausdruck als unendliche Menge von Brüchen aufgefasst werden:

$$\frac{14}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \ldots$$

Andererseits ist er aber in Bezug auf die zugrunde liegende Einheit eine endliche Größe. Daraus behauptet Bolzano nun, dass die Summe von unendlich vielen endlichen Größen wieder eine endliche Größe ergibt.

Interessant in diesem Zusammenhang ist sein Beweis für die Summe der unendlichen geometrischen Reihe: [10]

$$a + ae + ae^2 + \ldots = \frac{a}{1-e} \text{ für } e < 1$$

Angenommen $a = 1$, e positiv und man setzt

$$(1)\ S = 1 + e + e^2 + \ldots$$

S ist jedenfalls eine positive Größe. Weiters gilt für alle ganzzahligen Werte n:

[9] Bolzano B.: „Paradoxien des Unendlichen", Seite 22
[10] derselbe, Seite 24ff

$$(2)\ S = \frac{1-e^n}{1-e} + e^n + e^{n+1} + \ldots$$

Wenn man die unendliche Reihe $e^n + e^{n+1} + \ldots$ durch P^1 ersetzt, erhält man

$$(3)\ S = \frac{1-e^n}{1-e} + P^1$$

P^1 ist von *e* und *n* abhängig und eine positive Größe. Auf der anderen Seite ist aber

$$e^n + e^{n+1} + \ldots = e^n\,[1 + e + \ldots]$$

Die Reihe in [ ] ist dabei aber ungleich der Reihe in (1), denn diese Reihe hat um *n* Glieder weniger als die erste. Daraus folgt die Gleichung:

$$[1 + e + e^2 + \ldots] = S - P^2,$$

wo P^2 eine stets positive Größe ist, die von *n* abhängt. Dann erhält man:

$$(4)\ S = \frac{1-e^n}{1-e} + e^n\,[S - P^2] \text{ oder}$$

$$S[1 - e^n] = \frac{1-e^n}{1-e} - e^n P^2 \text{ oder}$$

$$(5)\ S = \frac{1}{1-e} - \frac{e^n}{1-e^n}\cdot P^2$$

Setzt man nun Gleichung (3) und (5) gleich, erhält man:

$$-\frac{e^n}{1-e} + P^1 = -\frac{e^n}{1-e^n}\cdot P^2 \text{ oder}$$

$$P^1 + \frac{e^n}{1-e^n}\cdot P^2 = \frac{e^n}{1-e}$$

Wenn *n* nun beliebig groß angenommen wird, wird der Wert von $\frac{e^n}{1-e}$ kleiner als jede Größe $\frac{1}{N}$ und damit werden auch P^1 und $\frac{e^n}{1-e^n}\cdot P^2$ kleiner als jeder beliebige Wert. Aus (3) und (5) folgt nun, dass S nicht von *n* abhängen kann und damit gilt:

$$S = \frac{1}{1-e}$$

□

Bolzano geht in diesem Beweis von zwei Voraussetzungen aus:
(1) Der Teil ist kleiner als das Ganze. P^1 ist eine echte Teilmenge von S.
(2) Jede Menge bestimmt eine Größe.

Bolzano sagt selbst, dass man bei zwei Summen, die eine nicht für die größere erklären darf, selbst wenn sie Glieder enthält, die der anderen fehlen: „*Wollen wir also in unseren Rechnungen mit dem Unendlichen nicht auf Irrwege geraten: so dürfen wir nie uns erlauben, zwei unendlich große Größen, die aus Summierung der Glieder zweier unendlicher Reihen entstanden sind, schon darum für gleich, oder die eine für größer oder kleiner als die andere zu erklären, weil je ein Glied in der einen je einem in der anderen Reihe entweder gleich oder größer oder kleiner als das der letzteren ist. Wir dürfen ebensowenig die eine Summe für die größere erklären, bloß weil sie die sämtlichen Glieder der anderen und nebstdem noch gar viele, sogar unendlich viele Glieder (die alle positiv sind) in sich schließt, welche der anderen fehlen*.“[11]

Andererseits fasst Bolzano die Summe der verdoppelten natürlichen Zahlen als größer auf als die Summe der geraden natürlichen Zahlen, obwohl in beiden Reihen gleich viele Glieder sind. Um dies zu verdeutlichen, sind folgende Vorbemerkungen notwendig: Teile eines Inbegriffes heißen Inhalt, dargestellt durch [ ]. Unter dem Umfang eines Inbegriffes können Gegenstände verstanden werden, die sich auf eine gewisse Vorstellung beziehen, < >.[12]

Sei nun A der Inbegriff der natürlichen Zahlen:
<A>= 1, 2, 3, ...
[A] = natürlich, Zahl

Sei B der Inbegriff der verdoppelten natürlichen Zahlen:
<B>= 2, 4, 6, ...
[B] = natürlich, Zahl, multipliziert mit, 2

Sei C der Inbegriff der geraden natürlichen Zahlen:
<C> = 2, 4, 6, ...
[C] = natürlich, Zahl, Rest, nicht, teilbar durch, 2

Nun gilt: [C] $\neq$ [B], <C> = <B>, C $\neq$ B
B und C entstehen beide aus A, das unendlich ist. Man betrachte aber die natürlichen Zahlen bis zu einem gewissen *n*. In B entstehen daraus die *n* Zahlen 2 · 1, 2 · 2, ..., 2 · *n*; in C aber nur $\frac{n}{2}$ Zahlen 2, 4, 6, ..., weil nur jede zweite Zahl gerade ist. *n* kann nun beliebig groß gewählt werden, da die natürlichen Zahlen unendlich sind. Daraus ergibt sich das Verhältnis zwischen [B] und [C], nämlich 2.

Was die Summe einer unendlichen Reihe durch die Formel $\frac{a}{1-e}$ für die Fälle $|e| \geq 1$ betrifft, bestreitet Bolzano, dass man sie berechnen kann. Die Gleichung

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + \dots = \frac{1}{3} \quad \text{,wo } a = 1, e = -2$$

ist nach ihm nicht richtig, weil falsch geschlossen wurde:

$$x = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \dots$$

[11] derselbe, Seite 53
[12] siehe Spalt D.: „Rechnen mit dem Unendlichen“, Seite 200f

$$= 1 - 2(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + ...) = 1 - 2x$$

Dabei wird nach Bolzano aber nicht beachtet, dass die Reihe in den Klammern nicht dieselbe wie in der Zeile darüber ist, weil sie nicht mehr dieselbe Menge an Gliedern hat. Eine solche Sichtweise führt nämlich zu Widersprüchen: Einerseits wäre

$$1 - 2 + 4 - 16 + 32 - 64 - ...=$$
$$= 1 + (-2 + 4) + (-8 + 16) + (-32 + 64) + ...$$
$$= 1 + 2 + 8 + 32 + 64 + ...$$

Andererseits aber:

$$= (1 - 2) + (4 - 8) + (16 - 32) + (64 - 128) + ...$$
$$= -1 - 4 - 16 - 64 -...$$

Somit erhält man einmal einen unendlich großen positiven, einmal einen unendlich großen negativen Wert desselben Ausdrucks. Heute ergibt sich diese Problematik nicht mehr, da man nur konvergenten Reihen einen Wert zuordnet.

Bolzano beschäftigt sich auch mit dem Thema der Geometrie und gibt in diesem Zusammenhang folgende Definitionen:
Ein eindimensionaler Raum (Linie) besteht dann, „*wenn jeder Punkt für jede hinlänglich kleine Entfernung einen oder mehrere, keinesfalls aber so viele Nachbarn hat, daß deren Inbegriff für sich allein schon ein Ausgedehntes wäre*." Ein zweidimensionaler Raum (Fläche) liegt vor, „*wenn jeder Punkt für jede hinlänglich kleine Entfernung eine ganze Linie von Punkten zu seinen Nachbarn hat*." Und ein dreidimensionaler Raum (Körper) besteht dann, „*wenn jeder Punkt für jede hinlänglich kleine Entfernung eine ganze Fläche voll Punkte zu seinen Nachbarn hat*."[13] Die Menge der Punkte einer Fläche ist unendlichmal größer als die einer Linie, sowie die Menge der Punkte eines Körpers unendlichmal größer ist als die einer Fläche. Eine begrenzte oder unbegrenzte Linie ist definiert als der Inbegriff aller Punkte, die zwischen a und b liegen. Zwei Ausdehnungen haben dieselbe Größe, wenn sie dieselbe Menge von Punkten enthalten, die Umkehrung gilt nicht. Eine unendliche Ausdehnung, die aus endlichen Größen besteht, ist nur bei Flächen und Körpern, nicht aber bei Linien möglich. Andererseits können nur Flächen und Linien unendliche Größen besitzen, die auf einen endlichen Raum beschränkt sind.

Interessant ist Bolzanos Ansicht über das Kontinuum. Eine unendliche Menge von Punkten erzeugt noch kein Kontinuum, dazu bedarf es einer bestimmten Anordnung. *„...dort, aber auch nur dort sei ein Kontinuum vorhanden, wo sich ein Inbegriff von einfachen Gegenständen (von Punkten in der Zeit oder im Raume oder auch von Substanzen) befindet, die so gelegen sind, daß jeder einzelne derselben für jede auch noch so kleine Entfernung wenigstens einen Nachbar in diesem Inbegriffe habe*."[14] Punkte sind nach ihm einfache Teile des Raumes, die keine Begrenzungen haben, d.h. keine rechte oder linke Seite. Er sagt, dass man dies nicht mit dem Auge wahrnehmen kann oder mit Fingern berühren, um es zu verstehen. Diese Tatsache wird allein durch den Verstand erkannt.

[13] Bolzano B.: "Paradoxien des Unendlichen", Seite 80
[14] derselbe, Seite 73

Bolzano äußerst sich auch zur Differenzial- und Integralrechnung. Im Gegensatz zu seinen Vorläufern benötigt er keine Größen, die unendlich klein werden. Er fordert einzig frei veränderliche Größen, die eine Ableitung besitzen und von anderen Größen abhängen. Die Ableitung muss auch nicht überall existieren, sondern nur für die Werte, die man benötigt. Der bekannte Quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

kommt nun $f'(x)$ so nahe, wie man will, wenn das Δx klein genug ist. Wenn man nun Δx und Δy gleich Null setzt, schreibt man symbolisch $\frac{dy}{dx}$ und deutet damit an, dass man *y* nach *x* abgeleitet hat. Es soll aber keine Division von Null durch Null darstellen.

Zum Abschluss seien noch kurz zwei Kritikpunkte Bolzanos an der Auffassung seiner Vorgänger über das Unendliche erwähnt:

Bolzano kritisiert Cauchy, der das Unendliche als veränderliche Größe beschreibt, deren Wert weiter als jede gegebene Größe wächst. Die Kritik richtet sich vor allem auf die veränderliche Größe, da diese in Wirklichkeit keine Größe an sich ist, sondern nur die Vorstellung einer Größe, die selbst eine unendliche Menge ist. Ebenso meint er, dass man für das unendlich Kleine nicht einfach Null „einsetzen“ kann, wie es Cauchy tut.

Die Auffassung von Spinoza, dass das Unendliche nur das sein kann, was sich nicht mehr vermehren kann, ist für Bolzano viel zu eng. Sie lässt sich mathematisch widerlegen. Als Beispiel bringt er eine Gerade, die auf der einen Seite bis ins Unendliche verlängert wird. Jeder vernünftige Mathematiker wird nun zugeben müssen, dass man diese Gerade auch auf der anderen Seite noch vergrößern kann.

4.2 Georg Wilhelm Friedrich Hegel – Cantors philosophischer Vorgänger

Hegel (1770 – 1831) teilt die Unendlichkeit in eine schlechte und eine wahrhafte (unendliche Subjektivität). Im ersten Teil seines Werkes „*Wissenschaft der Logik*“ verwendet er den Begriff der „schlechten Unendlichkeit“ als Wendung für die verstandesmäßige Vorstellung des Unendlichen. Das Endliche ist durch eine Schranke definiert. Dies ist aber gleichzeitig der Hinweis auf das dahinter stehende Unbeschränkte. Letzteres ist aber nichts anderes, als das Gegenteil zur Endlichkeit. Beide stehen in einer Wechselbeziehung und dadurch wird das Endliche selbst zu einem endlich Unendlichen. Schlechte Unendlichkeiten findet man beispielsweise im mathematisch Unendlichen oder beim Prozess der Fortpflanzung. Die wahrhafte Unendlichkeit dagegen verweist nicht über sich hinaus auf ein oder etwas anderes. „*...das wahrhaft Unendliche ist nicht ein blosses Jenseits des Endlichen, sondern es enthält dasselbe aufgehoben in sich selbst*.“[15] Man könnte sie sich als einen Kreis vorstellen, in dem sich das

[15] Hegel G.W.F.: „Hegel´s Kleine Logik“, Seite 73

„Unendliche selber fasst“. Das schlechte Unendliche dagegen könnte man sich als Linie denken: es gibt keinen Anfang und kein Ende.

Auch Spinoza „definiert“ das Unendliche über einen Kreis, in dem noch ein Kreis enthalten ist. Diese beiden haben kein gemeinsames Zentrum. Zwischen ihnen befinden sich unendlich viele Linien, die sich durch ihre Länge unterscheiden. Dies bezeichnet er als schlechte Unendlichkeit. Der äußere Kreis allein ist das wahrhaft Unendliche, die affirmative Unendlichkeit.

Durch die Auseinandersetzung mit den Gedanken Cavalieris[16], Spinozas und Kants vertieft Hegel sein Studium über das wahrhaft Unendliche. Durch diese vier Männer wurden neue Gedanken in die Philosophie – und Mathematik – eingebracht, so dass es möglich wurde, den aristotelischen Begriff des Unendlichen zu überwinden. Hegel erkennt z. B. in der Auseinandersetzung mit Kants Theorien über unendliche Mengen, dass das Unendliche vergleichbar ist, wenn es als vollendet angesehen wird. Darum ist es auch möglich, dass ein Unendliches größer ist als ein anderes – dann kann es aber paradoxerweise nach Hegel nicht mehr als vollendet betrachtet werden. Die Antwort auf diese Problematik gibt Cantor[17].

Hegel unterscheidet des Weiteren zwischen Quantität und Qualität. Erstere bezeichnet die Einheit von Diskretem und Kontinuität und stimmt mit dem aristotelischen Begriff der Quantität überein. Die Qualität ist in Analogie zum Begriff der Größe zu denken. Qualität ist immer endlich und veränderlich und benötigt eine Grenze, durch die sie erst ist, was sie ist. Quantität ist aufgehobene Qualität.

Wie kann man sich eine derartige Grenze vorstellen? Hegel gibt hier ein sehr schönes <u>Beispiel</u>: Ein Grundstück ist quantitativ durch seine Ausmaße begrenzt. Qualitativ ist es dadurch begrenzt, dass es Wiese ist, und nicht etwa Teich oder Wald.
Der Begriff der Grenze ist jedoch dialektisch: einerseits macht sie die Realität des Daseins aus, andererseits ist sie die Negation dessen. Dadurch, dass die Grenze Negation des Etwas ist (= Nichts), ist das Nichts seiend und wird von Hegel „Anderes“ genannt. „*Etwas wird ein Anderes, aber das Andere ist selbst ein Etwas, also wird es gleichfalls ein Anderes und so fort ins Unendliche. Diese Unendlichkeit ist die schlechte oder negative Unendlichkeit*,...“[18]

Bestimmt man die Quantität nun einmal als kontinuierlich, einmal als diskret, so entstehen die Antinomien des Raumes, der Zeit und der Materie, d.i. die Teilbarkeit ins Unendliche oder das Bestehen aus Unteilbaren. Sagt man Raum, Zeit und Materie sind kontinuierliche Quantitäten, so sind sie ins Unendliche teilbar. Sagt man, sie sind diskret, so sind sie an sich geteilt und bestehen aus unteilbarer Eins.

---

[16] Die fluentistische Auffassung Cavalieris ist ähnlich zu Hegels ontologischer Logik. Aus dieser konstruiert er beispielsweise seine Naturphilosophie.

[17] Cantor meint zu Hegel: *„..., zumal bei Hegel alles widerspruchsvoll, dunkel und konfuse ist, ja sogar der Widerspruch als hervortretendes Element seiner Philosophie von ihm selbst zum charakteristischen Eigentum seiner Denkweise erhoben worden ist, um welches ich wenigstens ihn nicht beneide*.“ In: „Gesammelte Abhandlungen“, Seite 391

[18] Hegel G.W.F.: „Hegel´s Kleine Logik“, Seite 139f

Zahl ist für Hegel – wiederum in Übereinstimmung mit Aristoteles – eine bestimmte Vielheit, die eine Grenze besitzt. Durch diese ist die Zahl aber nur unbestimmt begrenzt. Größen ihrerseits können in extensive und intensive eingeteilt werden. Die extensive Größe bezeichnet ein Vielfaches einer bestimmten Grundeinheit, die bei intensiven Größen fehlt. Trotzdem gibt es auch hier eine Vielheit, die zusammengefasst werden kann. Dadurch wird diese Vielheit geordnet. Die Grenze einer Zahl wird nun durch das Verhältnis (qualitatives Quantitätsverhältnis) der beiden Größen bestimmt.

In weiterer Folge behauptet Hegel, dass diese beiden Größen (extensive und intensive) identisch sein können. Erst in dieser Identität kann sich eine Zahl verwirklichen. Intensive Größen können jedoch auf extensive reduziert werden. Damit will er auf die problematischen Grundlagen des „mechanistischen" Infinitesimalkalküls hinweisen. Dieses wird lediglich durch eine Kombination von Zeichen (Differenzialen) auf einen reinen Mechanismus zurückgeführt, der nicht zum Begriff des Unendlichen passt. Für Hegel gibt es nämlich kein unendlich Kleines oder Großes: „*Das Unendlichgroße und Unendlichkleine sind daher Bilder der Vorstellung, die bey näherer Betrachtung sich als nichtiger Nebel und Schatten zeigen*."[19] Die einzig richtige und akzeptable Methode in der Mathematik ist daher diejenige, alles auf das Endliche zurückzuführen. Weiters meint er, dass die Grundbegriffe der Mathematik erst in der Philosophie völlig geklärt werden können.

4. 3 Georg Cantor

Cantor wurde 1845 in St. Petersburg geboren. 1856 übersiedelt die gesamte Familie (Cantor hatte noch drei Geschwister) nach Frankfurt/Main, dort sollte Georg das Ingenieurwesen erlernen. Nach Absolvierung der Höheren Gewerbeschule (1862) in Darmstadt gewährt sein Vater ihm das Studium der Mathematik an der Universität in Zürich. Nach dem Tod seines Vaters 1863 studierte er dann im damals preußischen Berlin weiter, wo er unter anderem Vorlesungen von Weierstraß (eigene Forschungsergebnisse über analytische und elliptische Funktionen) und Kronecker (Theorie der algebraischen Gleichungen, Determinanten und Integrale, sowie Zahlentheorie) besuchte und 1867 seine Dissertation einreichte. Ein Jahr später absolvierte er noch die Staatsprüfung zum höheren Lehramt.

Schließlich ging er als Privatdozent an die Universität Halle, wo Eduard Heine das Ordinariat der Mathematik leitete. Dieser motivierte Cantor sich mit Problemen der Eindeutigkeit der Fourierentwicklung zu beschäftigen. Die Frage der Entwickelbarkeit einer mit 2π periodischen Funktion in eine trigonometrische Reihe geht auf Euler und Bernoulli zurück und wurde von Mathematikern wie Dirichlet, Lobatschewski und Riemann behandelt. Schließlich beschäftigt sich Cantor mit der Eindeutigkeit der Fourierentwicklung in der Arbeit von 1870: „*Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt*."

Hier zeigt Cantor, dass aus

[19] König G.: „Konzepte des mathematisch Unendlichen im 19. Jahrhundert", Seite 106

(1) $\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \cos nx + d_n \sin nx\right) = 0 \qquad \forall x \in (0, 2\pi)$

folgt: $c_i = 0$, $d_i = 0$ $\forall i$.

Beweis(idee):[20]

Cantor hat früher schon bewiesen, dass bei einer trigonometrischen Reihe

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n + \cdots = \frac{1}{2}b_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + \cdots + a_n \sin nx + b_n \cos nx + \cdots$$

die Koeffizienten a_n und b_n bei wachsendem n unendlich klein werden, wenn die Reihe für sämtlich x in einem beliebigen Intervall konvergiert.

Hat man nun zwei solche Reihen, die für alle x konvergieren und dieselbe Funktion darstellen, so ergibt sich nach Abziehen der einen von der anderen:

(2) $0 = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots$

wo $C_0 = \frac{1}{2}d_0, C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$ für n = 1, 2, ... Mit wachsendem n werden auch hier die Koeffizienten c_n und d_n unendlich klein.

Riemann (1826 – 1866) hatte in seiner Habilitationsschrift folgende Funktion eingeführt

$$F(x) = C_0 \frac{x^2}{2} - C_1 - \frac{C_2}{4} - \cdots - \frac{C_n}{n^2} - \cdots$$

und bewiesen, dass:

1. *F(x)* für alle $x \in (0, 2\pi)$ stetig ist.
1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x+\alpha) - F(x-\alpha) - 2F(x)}{\alpha^2} = 0$ für alle $x \in (0, 2\pi)$.

Nun kann gezeigt werden, dass aus diesen Bedingungen $F(x) = cx + c'$ folgt, d.h. dass *F(x)* eine ganze Funktion ersten Grades ist.[21]

Für alle x ist daher:

$$C_0 \frac{x^2}{2} - cx - c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \cdots + \frac{C_n}{n^2} + \cdots$$

Die rechte Seite der Gleichung ist periodisch, woraus $c = 0$ und $C_0 = \frac{d_0}{2} = 0$ folgt.

Es bleibt die Gleichung:

$$-c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \cdots + \frac{C_n}{n^2} + \cdots$$

Die Reihe auf der rechten Seite ist gleichmäßig konvergent und kann daher mit cos *n(x – t)* multipliziert werden. Nach Integration von 0 bis 2π erhält man:

$c_n \sin nt + d_n \cos nt = 0$ mit t reell, beliebig.

Daher: $c_n = d_n = 0$.

[20] Cantor G.: „Gesammelte Abhandlungen“, Seite 80ff

[21] Der Beweis stammt von Schwarz und wurde mit seinem Einverständnis von Cantor veröffentlicht.

Damit ist folgender Satz bewiesen:
„*Wenn eine Funktion f(x) einer reellen Veränderlichen x durch eine für jeden Wert von x konvergente trigonometrische Reihe gegeben ist, so gibt es keine andere Reihe von derselben Form, welche ebenfalls für jeden Wert von x konvergiert und die nämliche Funktion f(x) darstellt*.“[22]

Ein Jahr später zeigte Cantor, dass der obige Satz richtig bleibt, „*wenn man in einer Ausnahmemenge von endlich vielen Punkten die Konvergenz der Reihe in (1) aufgibt oder einen Wert* $\neq 0$ *zuläßt*.“[23]

Nun stellte er sich die entscheidende Frage, ob auch Ausnahmemengen von unendlich vielen Punkten zugelassen sind bzw. welche Art von Mengen dies sind. Angeregt wurde er dazu vermutlich durch eine Arbeit von Hermann Hankel. Darin versucht jener zu zeigen, wie wichtig unendliche Punktmengen mit gewissen charakteristischen Eigenschaften bei der Untersuchung von Funktionen sind. Eine von ihm benutzte Methode ist das „Kondensationsprinzip der Singularitäten“, das Cantor später rezensierte und mit Hilfe seiner mengentheoretischen Resultate verallgemeinerte und verbesserte.

Um seiner Fragestellung nachgehen zu können, fehlt es aber noch an einer exakten Theorie der reellen Zahlen, die er vorweg gibt:
Ausgangspunkt sind die rationalen Zahlen (Cantor bezeichnet sie als Gebiet *A* einschließlich der Null). Eine reelle Zahl wird durch eine Folge rationaler Zahlen $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ repräsentiert, wenn zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ existiert mit $|a_{m+n} - a_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und alle *m*. Cantor drückt dies mit den Worten aus: „*Die Reihe (1) hat eine bestimmte Grenze b*.“[24] Hat die (Fundamental)Folge keinen Grenzwert, entspricht sie einer irrationalen Zahl. Für den neuen Zahlenbereich werden nun Größenbeziehungen und Rechenoperationen eingeführt. Zudem bemerkt er, dass der neue Zahlbereich vollständig ist.

Cantor zeigt auch den Zusammenhang dieser Theorie mit dem Kontinuum: Dazu führt er auf einer geraden Linie einen festen Punkt o ein, von dem aus jeder Punkt der Linie durch seine Entfernung von o angegeben werden kann. Jeder Punkt auf dieser Geraden entspricht einer reellen Zahl. Damit es möglich wird, auch jeder reellen Zahl genau einen Punkt der Geraden zuzuschreiben, muss dies als ein zusätzliches Axiom hinzugefügt werden.[25]

Eine weitere Neuheit ist die Einführung der Ableitung von Punktmengen: Eine Punktmenge ist eine endliche oder unendliche Menge von Punkten einer Geraden, d.h. eine Teilmenge der Menge der reellen Zahlen. „*Unter einem „Grenzpunkt* [Häufungspunkt, Anmerkung der Verfasserin] *einer Punktmenge P“ verstehe ich einen Punkt der Geraden von solcher Lage, daß in jeder Umgebung desselben unendlich viele Punkte aus P sich befinden, wobei es vorkommen kann, daß er außerdem selbst zu der Menge gehört*.“[26] Die Menge der Häufungspunkte der

[22] Cantor G.: „Gesammelte Abhandlungen“, Seite 83
[23] Purkert W., Ilgauds H.J.: „Georg Cantor, 1845 – 1918“, Seite 35
[24] Cantor G.: „Gesammelte Abhandlungen“, Seite 93; die Reihe (1) ist die Folge $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Heute würde man solche Folgen als Fundamentalfolgen bezeichnen.
[25] Dies entspricht dem späteren Cantor – Dedekind – Axiom.
[26] Cantor G.: „Gesammelte Abhandlungen“, Seite 98

Punktmenge *P* bezeichnet Cantor als erste Ableitung P'. Ist P' unendlich, so kann man eine weitere abgeleitete Punktmenge P'' bilden usw.

Allgemein können durch $P^{(n)} = \left(P^{(n-1)}\right)'$ höhere Ableitungen von Punktmengen gebildet werden. Eine Punktmenge ist von der *n*-ten Art, wenn $P^{(n+1)}$ keine Punkte mehr enthält. Eine Beispiel für eine Punktmenge *n*-ter Art wäre ein einzelner Punkt, wenn die Abszisse eine Zahlgröße *n*-ter Art ist.

Nach dieser Vorarbeit, kann folgender Satz bewiesen werden:
„*Wenn eine Gleichung besteht von der Form*

$$0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \cdots$$

wo $C_0 = \frac{1}{2} d_0 ; C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx,$ *für alle Werte von x mit Ausnahme derjenigen, welche den Punkten einer im Intervall (0 ... 2π) gegebenen Punktmenge P der* ν^{ten} [*n*-ten, Anmerkung der Verfasserin] *Art entsprechen, wobei* ν *eine beliebig große ganz Zahl bedeutet, so ist*

$$d_0 = 0, c_n = d_n = 0.$$ “[27]

Dieser Satz kann auch folgendermaßen formuliert werden:
„*Eine unstetige Funktion f(x), welche für alle Werte von x, welche den Punkten einer im Intervall (0 ... 2π) gegebenen Punktmenge P der* ν^{ten} *Art entsprechen, von Null verschieden oder unbestimmt, für alle übrigen Werte des x aber gleich Null ist, kann durch eine trigonometrische Reihe nicht dargestellt werden*.“[28]
Für den Beweis selbst sei verwiesen auf die „Gesammelten Abhandlungen“, Seite 99ff.

Der eigentliche Ursprung der Mengenlehre liegt nun in der Idee der transfiniten (überendlichen) Ordnungszahl, zu der er durch Bildung von sukzessiven Ableitungen einer Punktmenge gelangte. Ist P', P'', P''' usw. die Folge der Ableitungen einer Punktmenge *P*, so gilt: $P' \supseteq P'' \supseteq P''' \supseteq \ldots$. Die Menge der Punkte, die in sämtlichen $P^{(n)}$ enthalten ist, kann man als Ableitung der Ordnung ∞ ansehen: $\bigcap_n P^{(n)} = P^{(\infty)}$. Die erste transfinite Ordnungszahl ist also ∞, wofür Cantor auch ω schreibt. Nun kann $P^{(\infty)}$ erneut abgeleitet werden, und so gelangt man zu $P^{(\infty+1)}, P^{(\infty+2)}, \ldots$

1872 lernt Cantor Richard Dedekind auf einer Reise in die Schweiz kennen. Aus der zufälligen Bekanntschaft ergibt sich ein reger Briefwechsel und Ideenaustausch. Aus einem Brief vom 29. November 1873 an Dedekind geht hervor, dass Cantor bekannt war, dass die rationalen Zahlen abzählbar sind, d.h. dass es eine eineindeutige Zuordnung zwischen den rationalen und natürlichen Zahlen gibt.

Die nächste Frage Cantors war, ob nun jede Menge abzählbar ist, also auch beispielsweise das Kontinuum. 1873 fand er schließlich einen Beweis, dass die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 sich nicht eineindeutig auf die Menge der natürlichen Zahlen abbilden lässt. Dieser beruht auf einer

[27] derselbe, Seite 99
[28] derselbe, Seite 101

Intervallschachtelung: „*Wenn eine nach irgendeinem Gesetze gegebene unendliche Reihe voneinander verschiedener reeller Zahlgrößen*

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots \qquad (4)$$

vorliegt, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle ($\alpha \ldots \beta$) eine Zahl η (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der (4) *nicht vorkommt*;"[29]

<u>Beweis</u>:
Sei $\alpha < \beta$; die ersten beiden Zahlen im Intervall sollen α', β' sein, wo $\alpha' < \beta'$. Die ersten beiden Zahlen im inneren des Intervalls $(\alpha' \ldots \beta')$ sollen α'', β'' sein, wo $\alpha'' < \beta''$ usw. Die Zahlen $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ steigen, während die $\beta', \beta'', \beta''', \ldots$ fallen. Jedes der Intervalle $(\alpha \ldots \beta), (\alpha' \ldots \beta'), (\alpha'' \ldots \beta''), \ldots$ schließt alle folgenden in sich ein. Hier sind zwei Fälle möglich:

(1) Die Anzahl der Intervalle ist endlich: das letzte Intervall sei $\left(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)}\right)$. In diesem Intervall liegt höchstens eine Zahl der obigen Reihe (4). Daher kann man eine Zahl η annehmen, die nicht in dieser Reihe enthalten ist, womit der Satz bewiesen wäre.

(2) Die Anzahl der Intervalle ist unendlich: Da die Zahlen $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ der Größe nach zunehmen, aber nicht ins Unendliche wachsen, haben sie eine Grenze α^∞. Genauso ist es mit den abnehmenden Zahlen $\beta', \beta'', \beta''', \ldots$, die als Grenze β^∞ haben.

    (a) $\alpha^\infty = \beta^\infty$: Beachtet man die Definition der Intervalle, erkennt man leicht, dass $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ nicht in der Reihe enthalten ist: wäre sie nämlich enthalten, so müsste $\eta = \omega_p$ sein, wo p ein bestimmter Index ist. ω_p liegt aber nicht im Inneren des Intervalls $\left(\alpha^{(p)} \ldots \beta^{(p)}\right)$, während η aber im Inneren liegt.

    (b) $\alpha^\infty < \beta^\infty$: In diesem Fall erfüllt jede Zahl η im Inneren des Intervalls $\left(\alpha^\infty \ldots \beta^\infty\right)$ oder an den Grenzen die Forderung, nicht in der Reihe enthalten zu sein.

□

Eine Schlussfolgerung des Satzes ist, dass es unendlich viele transzendente Zahlen gibt:
„*Ist $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ eine endliche oder unendliche Reihe voneinander linear unabhängiger Zahlen (so daß keine Gleichung von der Form $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten, die nicht sämtliche verschwinden, möglich ist) und denkt man sich den Inbegriff (Ω) aller derjenigen Zahlen Ω, welche sich als rationale Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten aus den gegebenen Zahlen ω darstellen lassen, so gibt es in jedem Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ unendlich viele Zahlen, die nicht in (Ω) enthalten sind*."[30]

[29] derselbe, Seite 117; der Beweis dazu 117f;
[30] derselbe, Seite 118; Inbegriff bedeutet Menge

Beweis (mittels heutiger Symbolik):[31]
A ... Menge der algebraischen Zahlen in (0, 1)
T ... Menge der transzendenten Zahlen in (0, 1)
N ... Menge der natürlichen Zahlen
Es gilt: (0, 1) = A $\cup$ T, A $\cap$ T = $\emptyset$. Da zwischen A und N eine eineindeutige Abbildung existiert und keine zwischen (0, 1) und N, kann T nicht leer sein. Daher existieren transzendente Zahlen. Es gibt sogar eine eineindeutige Abbildung zwischen (0, 1) und T.

□

Somit war auch bewiesen, dass es verschiedene Stufen des Unendlichen gibt. 1877 gelingt Cantor auch der Beweis, dass ein zweidimensionales Kontinuum eineindeutig auf ein eindimensionales abgebildet werden kann. Dazu stellt er zweidimensionale Koordinaten durch unendliche Dezimalbrüche dar: die Koordinaten des Quadrats seien x_1, x_2, die Dezimalbrüche lauten dann: $x_1 = 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \ldots, x_2 = 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \ldots$ Die Ziffern werden nun „gemischt" um eine eindimensionale Koordinate $y = 0, a_1^{(1)} a_1^{(2)} a_2^{(1)} a_2^{(2)} \ldots$ zu erhalten, d.h.

$$\left. \begin{cases} 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \ldots \\ 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \ldots \end{cases} \right\} \leftrightarrow 0, a_1^{(1)} a_1^{(2)} a_2^{(1)} a_2^{(2)} \ldots$$

Nach einem Einwand von Dedekind[32], geht Cantor zu Kettenbruchentwicklungen über.

Der Beweis für die eineindeutige Zuordnung zwischen Kontinua verschiedener Dimension gelang Cantor aber nicht. Im Zuge dieser Arbeit[33] definiert er erstmals den Begriff der **Mächtigkeit**[34]: Kann man zwei Mengen *M* und *N* eineindeutig aufeinander abbilden, so haben sie die gleiche Mächtigkeit bzw. sind äquivalent ($M \sim N$). Eine Menge M' heißt Bestandteil – heute würde man sagen Teilmenge – einer Menge *M*, wenn die Elemente von M' auch Elemente von *M* sind. Endliche Mengen sind gleichmächtig, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen besitzen. Während eine Teilmenge einer endlichen Menge immer eine kleinere Mächtigkeit besitzt als die ursprüngliche Menge, trifft dies bei unendlichen Mengen nicht mehr zu. Hier kann eine Teilmenge einer unendlichen Menge die gleiche Mächtigkeit aufweisen wie die Menge selbst. Dies ist allerdings ein Widerspruch zu Euklids Postulat „*Das Ganze ist größer als jeder seiner Teile*", wodurch man anfangs eher skeptisch gegen die „neue Mengenlehre" war. Die Gleichmächtigkeit wäre in heutiger Terminologie eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge von Mengen. Eine Mächtigkeit ist dann eine Äquivalenzklasse gleichmächtiger Mengen.

Als Beispiel gibt Cantor hier die Menge der positiven ganzen Zahlen *M* und die Menge der positiven geraden ganzen Zahlen *N*. *N* ist Teilmenge von *M*, beide haben aber dieselbe Mächtigkeit. Die Menge der positiven ganzen Zahlen ist gleichzeitig die kleinste Mächtigkeit.

---

31 Purkert W., Ilgauds H.J.: „Georg Cantor, 1845 – 1918", Seite 46
32 Dedekinds Einwand richtet sich gegen die eindeutige Darstellbarkeit der Punkte: Schreibt man etwa 0,2 statt 0,1999999..., hat der Punkt kein Urbild im Quadrat.
33 „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", 1878
34 Diesen Begriff hat Cantor von J. Steiner entlehnt, genauer aus dessen Vorlesungen über die synthetische Geometrie der Kegelschnitte.

In den Jahren von 1878 bis 1884 entstand die sechsteilige Arbeit „*Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten*“, die die Grundlagen der Mengenlehre enthält. Sie bildet auch den Höhepunkt in Cantors Schaffen.

<u>1. Teil</u> behandelt die Klassifizierung linearer Punktmengen:

(a) <u>Klassifizierung nach dem Verhalten bei sukzessivem Ableiten</u> (wobei die Betrachtungen auch auf *n*-dimensionale Punktmengen erweitert werden können): eine Punktmenge *P* heißt von erster Gattung und von *n*-ter Art, wenn $P^{(n)}$ für endliches *n* leer wird, ansonsten heißt sie von zweiter Gattung. Eine weitere Eigenschaft einer Punktmenge *P* ist, dass in einem gegebenen kontinuierlichen Intervall ($\alpha \ldots \beta$) entweder alle, einige oder keine Punkte von *P* enthalten sind. Liegt *P* teilweise oder ganz im Intervall, so ist es möglich, dass jedes noch so kleine Teilintervall von ($\alpha \ldots \beta$) Punkte von *P* enthält. Dann heißt *P* im Intervall ($\alpha \ldots \beta$) **überall-dicht**. Daraus folgt, dass auch P' überall-dicht ist und selbst alle Punkte des Intervalls ($\alpha \ldots \beta$) enthält. Weiters ist *P* auch in sämtlichen Teilintervallen überall-dicht. Eine derartige Punktmenge *P* ist notwendigerweise von der zweiten Gattung, da Punktmengen der ersten Gattung nirgends dicht sein können.

( ) <u>Klassifizierung nach der Mächtigkeit</u>: Mengen werden je nach Mächtigkeit (gleiche oder verschiedene) in verschiedene Klassen eingeteilt. Punktmengen einer bestimmten Klasse haben daher dieselbe Mächtigkeit. Eine Klasse wäre beispielsweise die Klasse der abzählbaren Punktmengen, d.h. solche, die mit der Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig sind. Darunter fallen Punktmengen erster Gattung, aber auch solche der zweiten Gattung, wie die Menge der rationalen oder algebraischen Zahlen. Eine weitere Klasse wären Punktmengen, deren Repräsentant ein beliebiges stetiges Intervall ist, z.B. (0, 1).
Im Zuge dessen gibt Cantor einen vereinfachten <u>Beweis</u> des Satzes auf Seite 94:[35] zu zeigen ist also, dass man in einem Intervall ($\alpha \ldots \beta$), wo $\alpha < \beta$, eine reelle Zahl η finden kann, die nicht in der vorgegebenen Reihe $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$ (bezeichnet als (ω)) vorkommt.

<u>Fall 1</u>: Die Menge (ω) ist im Intervall nicht überall-dicht: dann gibt es ein Teilintervall ($\gamma \ldots \delta$), dessen Zahlen nicht zu (ω) gehören. Man kann also leicht eine Zahl η im Teilintervall finden, die im Intervall ($\alpha \ldots \beta$) liegt und nicht zu (ω) gehört.

<u>Fall 2</u>: Die Menge (ω) ist im Intervall überall-dicht: Das Intervall ($\alpha \ldots \beta$) enthält Zahlen der Menge (ω), darunter muss es eine mit kleinstem Index geben. Diese sei $\omega_{\aleph_1} = \alpha'$, die nächst größere $\omega_{\aleph_2} = \beta'$ (Gleichheit ist ausgeschlossen, da laut Voraussetzung sämtliche Zahlen verschieden sind). Es ist also $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ und $\aleph_1 < \aleph_2$. Alle Zahlen ω_μ, für die $\mu \le \aleph_2$ liegen nicht im Intervall $(\alpha' \ldots \beta')$. Seien nun $\omega_{\aleph_3} = \alpha''$ und $\omega_{\aleph_4} = \beta''$ die kleinsten Zahlen dieses Intervalls. Durch dieselbe Schlussweise folgt, dass sämtliche Zahlen ω_μ, wo $\mu \le \aleph_4$ nicht im Inneren des Intervalls $(\alpha'' \ldots \beta'')$ liegen.

[35] Cantor G.: „Gesammelte Abhandlungen“, Seite 143ff

Allgemein erhält man das nächstfolgende Intervall von $\left(\alpha^{(\nu-1)} \ldots \beta^{(\nu-1)}\right)$ dadurch, dass man die Zahlen mit dem niedrigsten Index dieses Intervalls aufstellt, $\omega_{\aleph_{2\nu-1}} = \alpha^{(\nu)}$ und $\omega_{\aleph_{2\nu}} = \beta^{(\nu)}$. Im Intervall $\left(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)}\right)$ liegen dann sicher keine Zahlen ω_{μ}, für die $\mu \leq \aleph_{2\nu}$. Es ist also, da die $\aleph_i$ ganze Zahlen sind, $\aleph_{2\nu} \geq 2\nu$ und daher $\nu < \aleph_{2\nu}$. Wenn ν eine ganze Zahl ist, liegt die Größe ω_ν sicher außerhalb des Intervalls $\left(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)}\right)$.
Die Zahlen $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^{(\nu)}, \ldots$ wachsen innerhalb des Intervall (α … β), haben also eine Grenze *A*, so dass $\lim_{\nu=\infty} \alpha^{(\nu)} = A$. Dasselbe gilt für die abnehmenden Zahlen $\beta', \beta'', \beta''', \ldots, \beta^{(\nu)}, \ldots$, die die Grenze *B* haben mit $\lim_{\nu=\infty} \beta^{(\nu)} = B$. Es gilt: $\alpha^{(\nu)} < A \leq B < \beta^{(\nu)}$.

A < *B* ist hier unmöglich, da sonst jede Zahl ω_ν außerhalb des Intervalls (*A* ... *B*) liegen würde, da ω_ν außerhalb von $\left(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)}\right)$ liegt. Damit wäre aber die Reihe (ω) nicht überall-dicht, was gegen die Voraussetzung ist.
Es bleibt also nur der Fall *A* = *B*. Die Zahl η = *A* = *B* kommt in der Reihe (ω) nicht vor, denn wäre sie z. B. das ν-te Glied, dann wäre $\eta = \omega_\nu$. Dies ist aber unmöglich, da η im Intervall $\left(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)}\right)$ liegt, ω_ν aber außerhalb.

□

2. Teil: beinhaltet allgemeine Definitionen wie Gleichheit von Mengen, Ober- und Untermenge, Disjunktheit, Vereinigung oder Durchschnitt. Der Hauptinhalt ist aber, wie man transfinite Ordinalzahlen der zweiten Zahlklasse als sukzessive Ableitungsordnungen einer Punktmenge gewinnt: Ist *P* eine Punktmenge und $P', P'', \ldots, P^{(n)}, \ldots$ ihre Ableitungen, dann erhält man die erste unendliche Ordinalzahl (die erste Ableitung mit unendlicher Ordnung) ω durch $P^{(\omega)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n)}$. Darauf folgen $P^{(\omega+1)}, P^{(\omega+2)}, \ldots$. Die ω-te Ableitung wird mit $P^{(\omega \cdot 2)}$ bezeichnet. Durch Fortsetzen dieses Verfahrens erhält man Ableitungen $P^{(\omega n_0 + n_1)}$, wo n_0 und n_1 natürliche Zahlen sind. Darauf folgt die Ableitungsordnung ω^2 durch $P^{(\omega^2)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(\omega n)}$. Darauf folgen Ableitungen der Art $P^{\left(\omega^2 n_0 + \omega n_1 + n_2\right)}$, wo n_0, n_1 und n_2 wiederum natürliche Zahlen sind usw. Schließlich gelangt man zur Ordinalzahl[36] ω^ω, definiert durch $P^{\left(\omega^\omega\right)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{\left(\omega^n\right)}$. Führt man dies immer weiter fort, gelangt man zu den Zahlen $(\omega n)^\omega, \omega^{\omega+1}, \omega^{\omega+n}, \omega^{\omega n}, \omega^{\omega^n}, \omega^{\omega^\omega}, \ldots$ Cantor schreibt dazu: „*Wir sehen hier eine dialektische Begriffserzeugung, welche immer weiter führt und dabei frei von jeglicher Willkür in sich notwendig und konsequent bleibt*.“[37]
Für Punktmengen der ersten Gattung gilt $P^{(\omega)} \equiv 0$, d.h. $P^{(\omega)}$ besitzt keinerlei Punkte, und sie sind durch diese Gleichung völlig beschrieben.

[36] Cantor verwendet hierfür den Begriff Unendlichkeitssymbol und schreibt für ω auch noch ∞.
[37] Cantor G.: „Gesammelte Abhandlungen“, Seite 148

3. <u>Teil</u>: Hier überträgt Cantor die Begriffe Punktmenge und Ableitung auf *n*-dimensionale Räume und geht auf Eigenschaften abzählbarer Mengen ein, z. B. ist die Vereinigungsmenge abzählbar vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar. Des weiteren sagt er, wann eine Menge wohldefiniert ist: „*Eine Mannigfaltigkeit (ein Inbegriff, eine Menge) von Elementen, die irgendwelcher Begriffssphäre angehören, nenne ich wohldefiniert, wenn auf Grund ihrer Definition und infolge des logischen Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten*[38] *es als intern bestimmt angesehen werden muß, sowohl ob irgendein derselben Begriffssphäre angehöriges Objekt zu der gedachten Mannigfaltigkeit als Element gehört oder nicht, wie auch, ob zwei zur Menge gehörige Objekte, trotz formaler Unterschiede in der Art des Gegebenseins einander gleich sind oder nicht*.“[39]

4. <u>Teil</u>: beinhaltet Sätze zur mengentheoretischen Topologie und das Gebiet der Inhaltstheorie von Punktmengen, auf die ich jedoch nicht näher eingehen werde.

5. <u>Teil</u>: beinhaltet die Theorie der Ordinal- und Kardinalzahlen, sowie Betrachtungen zum Kontinuum und Auseinandersetzungen mit philosophischen Theorien.

Das mathematisch Unendliche sieht Cantor als eine veränderliche Größe, die entweder über alle Grenzen hinaus wächst, bis zu beliebiger Kleinheit abnimmt oder stets endlich bleibt. Dies nennt er das **Uneigentlich-Unendliche** (unendlich als veränderliches Endliches, απειρον, heute: potentiell unendlich). In der Geometrie und Funktionentheorie hat sich ein anderer Unendlichkeitsbegriff herausgebildet. Man denkt sich das Unendliche in einen ganz bestimmten (unendlich fernen) Punkt verlegt – dies nennt er das **Eigentlich-Unendliche** (unendlich als bestimmtes Unendliches, heute: aktual unendlich). Der Punkt im Unendlichen der komplexen Zahlenebene steht gegenüber den Punkten im Endlichen vereinzelt da.

Um die transfiniten Ordinalzahlen ohne Punktmengen einführen zu können, geht Cantor von zwei Erzeugungsprinzipien (EZ) aus. Wirken beide zusammen, wird jede Schranke in der Begriffsbildung realer ganzer Zahlen durchbrochen. Durch das Hemmungs- oder Beschränkungsprinzip werden allerdings gewisse Schranken auferlegt. Dadurch erhält man natürliche Abschnitte in der absolut unendlichen Folge aller „realen ganzen Zahlen“, die Zahlenklassen.

Die erste Zahlenklasse (I) ist die Menge der endlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, ..., ν,... Die zweite Zahlenklasse (II) besteht „*aus gewissen in bestimmter Sukzession einander folgenden unendlichen ganzen Zahlen*.“[40] Die Zahlenklasse (II) ist dabei von höherer Mächtigkeit als (I) und jede Menge der Mächtigkeit der ersten Zahlenklasse ist durch Zahlen der zweiten Zahlenklasse abzählbar. Analoges gilt für Mengen höherer Mächtigkeit.

---

[38] Das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten besagt folgendes: Zwischen Sein und Nichtsein desselben Sachverhaltes gibt es kein Drittes. Dies ist eines von insgesamt drei Prinzipien der aristotelischen Logik. Die übrigen beiden sind der Satz der Identität (a = a) und der Satz des zureichenden Grundes.

[39] Cantor G.: „Gesammelte Abhandlungen“, Seite 150

[40] derselbe, Seite 167

EZ 1: Zu einer Ordinalzahl α wird 1 hinzugefügt. Die so gebildeten Zahlen sind unendlich und es gibt keine größte Zahl. Stellt man sich ω als Grenze vor, der die Zahlen von (I) zustreben, d.h. sie ist größer als sämtliche der Zahlen ν, so kann man durch das Erzeugungsprinzip zu weiteren Zahlen ω + 1, ω + 2, ..., ω + ν, ... gelangen. Auch hier gibt es eigentlich keine größte Zahl, man kann sich aber dennoch eine denken und als 2ω bezeichnen. Sie soll auf alle bisherigen Zahlen ν und ω + ν folgen. Durch erneute Anwendungen des ersten Erzeugungsprinzips gelangt man zu 2ω + 1, 2ω + 2, ..., 2ω + ν, ...

EZ 2: Das zweite Erzeugungsprinzip entspricht der Vorgehensweise, durch die man die beiden Zahlen ω und 2ω erhalten hat. Liegt also eine unendliche Folge von Zahlen vor, von denen es keine größte gibt, so wird auf Grund des zweiten Erzeugungsprinzips eine neue Zahl geschaffen, die man sich als Grenze der vorhergehenden denken kann. Damit ist der Schritt ins Transfinite gesichert.

Das dritte Prinzip, das Hemmungsprinzip, besteht „*in der Forderung, nur dann mit Hilfe eines der beiden anderen Prinzipien die Schöpfung einer neuen ganzen Zahl vorzunehmen, wenn die Gesamtheit aller vorausgegangenen Zahlen die Mächtigkeit einer ihrem ganzen Umfange nach bereits vorhandenen definierten Zahlenklasse hat*.“[41] Mit dessen Hilfe kann gezeigt werden, dass die Zahlenklasse (II) die nächst höhere Mächtigkeit der Zahlenklasse (I) besitzt. In der Arbeit „*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*“ aus dem Jahre 1897 führt Cantor die Kardinalzahl $\aleph_0$ (Aleph-Null) als die Mächtigkeit der ersten Zahlenklasse ein. Dementsprechend bezeichnet $\aleph_1$ die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse. $\aleph_0$ ist damit die kleinste transfinite Kardinalzahl. Die „Limeszahl“ der Zahlenklasse (I) ist der Anfangswert ω der Zahlenklasse (II). Unter Anwendung der Erzeugungsprinzipien und unter Beachtung des Hemmungsprinzips gehört eine Zahl α also nur dann zur zweiten Zahlenklasse, wenn die Menge der vorhergehenden Zahlen die Mächtigkeit $\aleph_0$ besitzt. Kowalewski (1850 – 1891) meint dazu: „*Diese Mächtigkeiten, die Cantorschen Alephs, waren für CANTOR etwas Heiliges, gewissermaßen die Stufen, die zum Throne der Unendlichkeit, zum Throne Gottes emporführen*.“[42]
Der Beweis, dass $\aleph_1$ die nächst höhere Mächtigkeit von $\aleph_0$ ist, basiert auf folgendem:[43]

Zuerst wird bewiesen, dass $\aleph_0 \neq \aleph_1$. Dazu benötigt Cantor folgenden Hilfssatz: Eine abzählbare Menge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ (kurz (α_ν)) von Ordinalzahlen der Zahlenklasse (II) besitzt folgende Eigenschaften:

- es gibt eine größte Zahl γ oder
- es gibt ein $\beta \in$ (II), mit β ist größer als alle α_ν.

[41] Cantor G.: „Gesammelte Abhandlungen“, Seite 199
[42] Kowalwski, G.: „Bestand und Wandel“, Seite 201, München 1950
[43] Cantor G.: „Gesammelte Abhandlungen“, Seite 198ff und Purkert W., Ilgauds H.J.: „Georg Cantor, 1845 – 1918“, Seite 65ff

<u>Beweis des Hilfssatzes</u>:
Sei $\alpha_{\aleph_2}$ die erste Zahl in der Reihe (α_ν) größer α_1, $\alpha_{\aleph_3}$ die erste Zahl größer $\alpha_{\aleph_2}$, usw. Dann gilt:
$1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots$
$\alpha_1 < \alpha_{\aleph_2} < \alpha_{\aleph_3} < \ldots$
und $\alpha_\nu < \alpha_{\aleph_\lambda}$ für $\nu < \aleph_\lambda$.

<u>Fall 1</u>: Es gibt ein $\alpha_{\aleph_\rho}$, so dass alle Zahlen von (α_ν), die auf diese folgen, kleiner sind als sie. Dann ist $\alpha_{\aleph_\rho} = \gamma$ die größte Zahl unter sämtlichen α_ν.

<u>Fall 2</u>: Es gibt kein solches $\alpha_{\aleph_\rho}$. Nun bildet man folgende Mengen:
M_1 = Menge aller Ordinalzahlen β mit $1 \leq \beta < \alpha_1$
M_2 = Menge aller Ordinalzahlen β mit $\alpha_1 \leq \beta < \alpha_{\aleph_2}$
M_3 = Menge aller Ordinalzahlen β mit $\alpha_{\aleph_2} \leq \beta < \alpha_{\aleph_3}$ usw.
$M = \bigcup_i M_i$ ist abzählbar und es gibt nach Definition der zweiten Zahlenklasse ein $\beta \in$ (II), das die auf alle Zahlen von M folgende nächst größere Zahl ist. Weiters gilt $\beta > \alpha_\nu \ \forall \ \nu$, wegen $(\alpha_\nu) \subseteq M$, womit der Hilfssatz bewiesen wäre.

□

Daraus folgt nun, dass $\aleph_0 \neq \aleph_1$. Denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man (II) als Folge (α_ν) schreiben, die entweder ein größtes Element γ hätte oder von einem $\beta \in$ (II) übertroffen würde. Im ersten Fall würde $\gamma + 1 \in$ (II), ein Widerspruch, im zweiten Fall würde β einerseits in (α_ν) vorkommen (wegen der Voraussetzung (α_ν) = (II)), andererseits auch nicht vorkommen (nach der Konstruktion von $\gamma + 1$ bzw. β), was ebenfalls einen Widerspruch darstellt.

Um nun zu beweisen, dass $\aleph_1$ die nächstfolgende Mächtigkeit zu $\aleph_0$ ist, zeigt man folgendes: M sei eine Teilmenge von (II), dann sind folgende drei Fälle möglich:

1. *M* ist endlich
2. *M* ist abzählbar
3. *M* ist äquivalent zu (II)

Sei Ω die erste Zahl der dritten Zahlenklasse, dann sind sämtliche $\alpha \in M$ kleiner als Ω. Nun denkt man sich die Zahlen von M der Größe nach geordnet, wobei α_ω die kleinste, $\alpha_{\omega+1}$ die nächstgrößere ist usw. Somit erhält man eine wohlgeordnete Menge (α_β), wo β bei ω beginnend alle Zahlen der Menge der transfiniten Ordinalzahlen durchläuft, jedoch nur die Zahlen der zweiten Zahlenklasse, da stets $\beta \leq \alpha_\beta$ und $\beta < \Omega$. Nun gibt es genau drei Möglichkeiten:

1. β bleibt unterhalb einer festen Zahl der Menge $(\omega+n)_{n=1,2,\ldots}$, womit *M* endlich ist.
2. β nimmt alle Werte von $(\omega+n)_{n=1,2,\ldots}$ an, bleibt aber unterhalb einer festen Zahl $\alpha \in$ (II). Damit ist *M* (nach Definition von (II)) abzählbar.
3. β durchläuft sämtliche Zahlen von (II), womit *M* ~ (II).

□

Erst in späteren Arbeiten führt Cantor die Ordinalzahlen über Ähnlichkeiten wohlgeordneter Mengen ein, wodurch keine Erzeugungs- oder Hemmungsprinzipien mehr nötig sind.

6. Teil: behandelt Untersuchungen von Punktmengen und bringt grundlegende Sätze der mengentheoretischen Topologie – auch darauf werde ich nicht näher eingehen.

Auf einer Versammlung in Halle bringt Cantor erstmals das berühmte Diagonalverfahren, das ich in heutiger Terminologie wiedergeben möchte.[44] Mit dessen Hilfe ist es möglich auf einfache Weise zu zeigen, dass die reellen Zahlen überabzählbar sind.
Sei *M* die Menge aller Folgen $E=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$, deren Glieder („Koordinaten") zwei Werte, nämlich 0 oder 1 (Cantor schreibt hier *m* oder *w*) beliebig annehmen können. Es genügt zu zeigen, dass *M* nicht abzählbar sein kann.

Angenommen sei das Gegenteil: *M* sei abzählbar, dann wäre $M=\{E_1,E_2,E_3,\ldots\}$. M kann man daher in folgendem Schema anordnen:

$$\begin{aligned} E_1 &= (a_{11},a_{12},a_{13},\ldots) \\ E_2 &= (a_{21},a_{22},a_{23},\ldots) \\ E_3 &= (a_{31},a_{32},a_{33},\ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die a_{ik} sind hier entweder Null oder Eins. Nun konstruiert man ein $E_0=(b_1,b_2,b_3,\ldots)$, indem man $b_k=1$ setzt, wenn $a_{kk}=0$ und $b_k=0$, wenn $a_{kk}=1$. Es gilt nun $E_0\neq E_n$ für alle *n*, da sich beide mindestens in der *n*-ten Koordinate unterscheiden, d.h. E_0 kommt in *M* nicht vor. Andererseits besitzt *E* nur Koordinaten mit Werten 0 und 1, womit es zu *M* gehört. Widerspruch => *M* ist nicht abzählbar.

□

Die letzte Arbeit Cantors (erschienen 1895 und 1897 in den Mathematischen Annalen) sind die „*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*". Hier erhalten die Grundbegriffe ihre endgültige Form. Die erste Definition in dieser Arbeit ist die der Menge[45]: „*Unter einer „Menge" verstehen wir jede*

[44] Purkert W., Ilgauds H.J.: „Georg Cantor, 1845 – 1918", Seite 124
[45] In den vorangegangenen Arbeiten verwendet Cantor die Begriffe „Inbegriff" und „Mannigfaltigkeit" für Menge, jedoch ohne sie zu definieren. Erst in den Anmerkungen zum 5. Teil der Arbeit „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten" („Gesammelte Abhandlungen", Seite 204) wird der Begriff der Mannigfaltigkeit definiert: „*Unter einer „Mannigfaltigkeit" oder „Menge" verstehe ich nämlich*

Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“[46] Des weiteren wird nun der Mächtigkeitsbegriff mit dem der Kardinalzahl gleichgesetzt: „*„Mächtigkeit“ oder „Kardinalzahl“ von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, daß von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird*.“[47]

Die Kardinalzahl oder Mächtigkeit von *M* wird durch $\overline{\overline{M}}$ ausgedrückt. Nachdem gezeigt wurde, wie man Summe und Produkt von Kardinalzahlen berechnet, wendet sich Cantor der Potenz zu. Dazu definiert er den Begriff der Belegung der Menge *N* mit Elementen der Menge *M* (Belegung von *N* mit *M*). Die Belegung ist eine Funktion auf *N* mit Werten in *M*. Die Menge der verschiedenen Belegungen von *N* und *M* bildet die Belegungsmenge von *N* mit *M* und wird mit (*N* / *M*) bezeichnet, d.h. $(N/M)=\{f: N \to M\}$. Dies dient nun zur Definition der Potenz: $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}} = \left(\overline{\overline{N/M}}\right)$, wo $\overline{\overline{M}} = \boldsymbol{a}$ und $\overline{\overline{N}} = \boldsymbol{b}$. Die üblichen Potenzgesetzte bleiben hier erhalten.

Bezeichnet man die Mächtigkeit des Linearkontinuums *X* in (0,1) mit ***c***, so gilt:
(*) $\boldsymbol{c} = 2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}}$.

Durch Quadrieren erhält man:
$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \boldsymbol{c}$, denn es gilt: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ und $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ [48]

Durch fortgesetzte Multiplikation mit ***c*** erhält man: $\boldsymbol{c}^{\nu} = \boldsymbol{c}$, wo ν eine endliche Kardinalzahl darstellt. Potenziert man beide Seiten von (*) mit $\aleph_0$, erhält man:
$\boldsymbol{c}^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \boldsymbol{c}^{\aleph_0} = \boldsymbol{c}$

Cantor schreibt hier: „*Das ν-dimensionale sowohl, wie das $\aleph_0$-dimensionale Kontinuum haben die Mächtigkeit des eindimensionalen Kontinuums*. *Es wird also der ganze Inhalt der Arbeit im* 84*ten* *Bande des Crelle´schen Journals* [dies ist die Arbeit „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“, Anmerkung der Verfasserin] *mit diesen wenigen Strichen aus den Grundformeln des Rechnens mit Mächtigkeiten rein algebraisch abgeleitet*.“[49]

Im Allgemeinen gelten folgende Gesetze für Kardinalzahlen (*n* bezeichnet eine natürliche Kardinalzahl):

---

allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken läßt, d.h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann,...“

[46] Cantor G.: „Gesammelte Abhandlungen“, Seite 282

[47] derselbe, Seite 282

[48] Das Rechnen mit transfiniten Zahlen heißt transfinite Arithmetik. Dies ist die Theorie der (Operationen auf dem Bereich der) transfiniten Ordinal- und Kardinalzahlen. Im Transfiniten bleibt die strikte Monotonie von Addition und Multiplikation in beiden Argumenten nicht erhalten.

[49] Cantor G.: „Gesammelte Abhandlungen“, Seite 289

$$0<1<2<\cdots<\aleph_0<\mathrm{c}$$
$$\aleph_0+n=\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0,\mathrm{c}+n=\mathrm{c}+\aleph_0=\mathrm{c}+\mathrm{c}=\mathrm{c}$$
$$\aleph_0\cdot n=\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0,\mathrm{c}\cdot n=\mathrm{c}\cdot\aleph_0=\mathrm{c}\cdot\mathrm{c}=\mathrm{c}$$
$${\aleph_0}^n=\aleph_0,\mathrm{c}^{\mathrm{n}}=\mathrm{c},\ n\neq 0$$
$$n^{\aleph_0}={\aleph_0}^{\aleph_0}=\mathrm{c}^{\aleph_0}=\mathrm{c},\ n\geq 2$$

Die letzte Regel zeigt, dass man durch Bildung der Potenz zu einer höheren Mächtigkeit kommt – dies gilt auch im Transfiniten ganz allgemein.
Die Ordnungszahlen oder Ordinalzahlen bilden die Grundlage für die Definition der höheren transfiniten Kardinalzahlen. Eine Ordinalzahl ist definiert als der Ordnungstypus $\overline{M}$ einer wohlgeordneten Menge *M*. Abstrahiert man auch noch von der Rangordnung der Elemente, so erhält man die Kardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ der geordneten Menge *M*. Diese Kardinalzahl ist gleichzeitig die Kardinalzahl des Ordnungstypus $\overline{M}$.
Des Weiteren wird die zweite Zahlenklasse nicht mehr mit Hilfe des Hemmungsprinzips definiert, sondern wie folgt: „*Die zweite Zahlenklasse* $Z(\aleph_o)$ *ist die Gesamtheit {α} aller Ordnungstypen α wohlgeordneter Mengen von der Kardinalzahl* $\aleph_0$.“[50]

Cantor führt im folgenden einen neuen – von dem der Kardinalzahl verschiedenen – Potenzbegriff ein. Erst dadurch wird eine arithmetische Theorie der transfiniten Ordnungszahlen möglich. Dabei verwendet er die Methode der „Definition durch transfinite Induktion“:

Sei ξ eine Variable $\in$ (I) oder $\in$ (II) mit der Null und γ und δ seien Konstante aus demselben Gebiet mit $\delta > 0$ und $\gamma > 1$. Dann gilt folgender Satz:[51]

„*Es gibt eine einzige, völlig bestimmte eindeutige Funktion f(ξ) der Veränderlichen ξ, welche folgende Bedingungen erfüllt:*

0) *f*(0) = δ
1) *Sein ξ' und ξ'' zwei beliebige Werte von ξ, und ist $\xi' < \xi''$ so ist f(ξ') < f(ξ'').*
0) *Für jeden Wert von ξ ist f(ξ + 1) = f(ξ)γ*
2) *Ist {ξ_ν} eine beliebige Fundamentalreihe, so ist auch {f(ξ_ν)} eine solche, und hat man $\xi=\lim_\nu \xi_\nu$, so ist $f(\xi)=\lim_\nu f(\xi_\nu)$.*“

f(ξ) hat den Charakter einer „Normalfunktion“. $\xi=\lim_\nu \xi_\nu$ wird heute als Limeszahl bezeichnet. Sämtliche transfinite Anfangszahlen sind Limeszahlen, also beispielsweise $\omega\cdot 2,\omega^2,\omega^2+\omega,\ldots$ Unter $\lim_\nu f(\xi_\nu)$ versteht man die kleinste Ordinalzahl, die größer ist als alle $f(\xi_\nu)$, mit $\xi_\nu < \xi$.

Gibt man δ den Wert 1 und bezeichnet man *f(ξ)* durch γ^ξ, so besagt der Satz:[52]

---

[50] derselbe, Seite 325
[51] derselbe, Seite 336, für den Beweis: derselbe, Seite 336f
[52] derselbe, Seite 337, für den Beweis: derselbe, Seite 337f

„Ist γ eine beliebige der ersten oder zweiten Zahlenklasse angehörige Konstante > 1, so gibt es eine ganz bestimmte Funktion γ^{ξ} von ξ, so daß

1) $\gamma^{0} = 1$
1) *Wenn* $\xi' < \xi''$, *so ist* $\gamma^{\xi'} < \gamma^{\xi''}$.
2) *Für jeden Wert von* ξ *ist* $\gamma^{\xi+1} = \gamma^{\xi}\gamma$.
3) *Ist* $\{\xi_\nu\}$ *eine Fundamentalreihe, so ist auch* $\{\gamma^{\xi_\nu}\}$ *eine solche, und man hat, falls* $\xi = \lim_{\nu} \xi_\nu$, *auch* $\gamma^{\xi} = \lim_{\nu} \gamma^{\xi_\nu}$.“

Es gelten folgende <u>Rechengesetze für Potenzen</u>:

$$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}, \alpha \neq 1 \Rightarrow \left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$$

$$\alpha > 1 \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha^{\beta} < \alpha^{\gamma}, \alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha^{\gamma} \leq \beta^{\gamma}$$

$$\alpha > 1 \wedge \beta > 1 \Rightarrow \alpha + \beta \leq \alpha \cdot \beta \leq \alpha^{\beta}$$

Die Rechenregel $(\alpha \cdot \beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$ gilt im Bereich des Transfiniten im Allgemeinen nicht. Dies zeigt das Beispiel: $(\omega \cdot 2)^2 \neq \omega^2 \cdot 2^2$.

Für seine Entdeckungen bekam Cantor eine Reihe von Ehrungen. So wurde er 1901 Ehrenmitglied der London Mathematical Society und erhielt 1904 die höchste Auszeichnung der Royal Society, die Sylvester-Medaille. 1913 erhielt er den Königlichen Kronen-Orden 3. Klasse.

Die Beweise des Wohlordnungssatzes und des Kontinuumsproblems sind Cantor allerdings nicht mehr gelungen. Der Wohlordnungssatz besagt, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. Diesen Satz benötigt Cantor, da nur bei seiner Gültigkeit sämtliche Kardinalzahlen in der Folge der Alephs, die über die Theorie der Ordinalzahlen konstruiert ist, vorkommen. Erst E. Zermelo gelang 1904 mit Hilfe des Auswahlaxioms der Beweis.

Das Kontinuumsproblem behandelt folgende Frage: Gibt es eine Menge, „*deren Kardinalzahl größer ist als die der Menge der natürlichen Zahlen, aber kleiner als die der reellen Zahlen*?“[53] Mit anderen Worten bedeutet das, gibt es eine Mächtigkeit zwischen der Mächtigkeit der abzählbaren Mengen und des Kontinuums – repräsentiert z. B. durch das Intervall (0, 1)? Cantor meinte nein. Es konnte gezeigt werden: „*Wenn die der Mengenlehre zugrunde liegenden Postulate in sich widerspruchsfrei sind, dann kann man die Kontinuumshypothese weder widerlegen (Gödel 1938) noch beweisen (Cohen 1963), d.h. sie ist von den anderen Postulaten unabhängig*.“[54]

4.3.1 Philosophisch-mathematische Betrachtungen

Cantor musste sich die Frage nach der Ontologie (Seinsweise) seiner Mengen, transfiniten Zahlen usw. stellen. Er vertritt die Linie des objektiven Idealismus. Dieser spricht den Objekten der Mathematik – unabhängig von der real erfahrbaren Welt – Existenz in einer objektiven Welt der Ideen zu.

[53] Courant R., Robbins H.: „Was ist Mathematik?“, Seite 70
[54] derselbe, Seite 70

Dementsprechend spricht Cantor auch nie davon, die transfiniten Zahlen geschaffen zu haben, vielmehr hat er sie „erkannt“. Weiters meint er, dass die allgemeine Mengenlehre zur Metaphysik gehört. Es gibt für ihn zwei Bedeutungen der Existenz der endlichen bzw. unendlichen ganzen Zahlen:

(1) <u>intrasubjektive oder immanente Realität</u>: auf Grund von Definitionen nehmen sie in unserem Verstand einen bestimmten Platz ein, stehen in Beziehung zu den übrigen Bestandteilen unseres Denkens und modifizieren die Substanz unseres Geistes in bestimmter Art und Weise.

(2) <u>transsubjektive oder transiente Realität</u>: Zahlen sind Wirklichkeit, da sie Ausdruck von Vorgängen in der Außenwelt sind und ferner sind die Zahlenklassen (I), (II), ... Repräsentanten von Mächtigkeiten, die in der körperlichen und geistigen Natur wirklich vorkommen.

Diese beiden Realitäten hängen auf Grund der Einheit des Alls – zu dem wir ja auch gehören – zusammen. Als Konsequenz für die Mathematiker ergibt sich daraus, dass sie bei der Entwicklung von Ideen nur auf die immanente Realität ihrer Begriffe Rücksicht nehmen müssen, nicht aber auf die transiente Realität (dies ist Aufgabe der Metaphysik).
W. Purkert und H.J. Ilgauds meinen in ihrem Werk „*Georg Cantor*“ (Seite 156), dass für Cantor „*die transfinite Mengenlehre eine mathematische Repräsentation der göttlichen Idee unendlicher Zahlen bzw. eine Theorie des in natura naturata (in der geschaffenen Natur) aufgrund dieser Idee existierenden Unendlichen*“ war.

Auseinandersetzung mit anderen Philosophen:

Cantor ist der Meinung, dass sämtliche Argumente gegen das aktual Unendliche darauf beruhen, dass den unendlichen Zahlen die Eigenschaften endlicher Zahlen zugesprochen werden. Aristoteles spricht sich bekanntlich gegen die Existenz des aktual Unendlichen aus, da er nur Zählungen an endlichen Mengen durchführen konnte. Cantor meint dazu, dass man sehr wohl unendliche Mengen zählen kann, wenn sie wohlgeordnet sind. In diesem Zusammenhang gibt er auch den Unterschied zwischen Endlichem und Unendlichem an: zählt man endliche Mengen ab, so ist dies unabhängig von der jeweiligen Anordnung. Für unendliche Mengen trifft dies im Allgemeinen nicht zu. Hier ist die Anzahl einer unendlichen Menge eine durch das Gesetzt der Zählung mitbestimmte unendliche ganze Zahl. Aristoteles bringt aber noch ein anderes Argument gegen Unendlichkeit: das Endliche würde vom Unendlichen aufgehoben und zerstört werden. Auch dies trifft nach Cantor nicht zu, da nur die Hinzufügung einer unendlichen Zahl zu einer endlichen die Aufhebung der endlichen Zahl bewirkt.

<u>Beispiel</u>:
Ist ω die erste Zahl der zweiten Zahlenklasse, dann ist $1 + \omega = \omega$, aber $\omega + 1 = (\omega + 1)$. $\omega + 1$ ist nicht gleich ω. Im ersten Fall steht das Endliche vor dem Unendlichen und verschwindet daher im Unendlichen. Im zweiten Fall aber steht es hinter dem Unendlichen und es entsteht ein neues Unendliches.

Das Uneigentlich-Unendliche wurde z. B. von Hegel als „schlechtes Unendliches“ bezeichnet. Cantor meint, dass dies mit Unrecht geschehen ist, da es in der

Mathematik und den Naturwissenschaften ein brauchbares Instrument ist. Die unendlich kleinen Größen traten bisher nur in der Form des Uneigentlich-Unendlichen auf und haben ihre Bedeutung in der Infinitesimalrechnung und Funktionentheorie. Stattdessen sollten die Versuche aufgegeben werden, die unendlich kleinen Größen zu eigentlich-unendlich kleinen Größen zu machen.

Cantor meint, dass die Philosophen Locke, Descartes, Spinoza und Leibniz zumindest in dem Punkt übereinstimmen, dass zum Begriff einer Zahl ihre Endlichkeit gehört und das wahre Unendliche oder Absolute, das keinerlei Determination gestattet, in Gott liegt. Auch der Satz „omnis determinatio est negatio“ (Jede Determination ist eine Negation) steht für ihn außer Frage. Das bedeutet, dass jede mathematische Entität, die das Absolute beschreibt, ein Widerspruch in sich ist. Daher führt auch jeder Versuch, das System aller Ordinalzahlen als ein Objekt zu betrachten, unweigerlich zu einem Widerspruch. Er behauptet vielmehr, dass es nach dem Endlichen noch ein Transfinites (Suprafinitum) gibt, d.h. eine unbegrenzte „Stufenleiter“ von bestimmten unendlichen Arten. Diese sind – wie das Endliche – durch bestimmte, wohldefinierte und voneinander unterscheidbare Zahlen determiniert. Daher ist der Bereich der definierbaren Größen nicht mit den endlichen abgeschlossen.

Das aktual Unendliche kann laut Cantor in drei Hauptbeziehungen unterschieden werden:

1) das Absolute, sofern es „in Deo“ realisiert ist,
2) sofern es „in concreto“ in der natürlichen Welt vertreten ist,
3) sofern es als mathematische Größe vom Denken „in abstracto“ aufgefasst wird.

Die Punkte 2) und 3) nennt Cantor das Transfinitum und setzt es dem Absoluten entgegen. Ersteres (2) ist vermehrbar, im Gegensatz zum letzteren.

Der Grund dafür, dass man meint, nur endliche Zahlen denken/sich vorstellen zu können, liegt für die meisten in der Endlichkeit des menschlichen Verstandes. Dies ist aber nach Cantor ein Zirkelschluss, denn mit der Endlichkeit des menschlichen Verstandes wird gemeint, dass seine Möglichkeit der Zahlenbildung auf endliche Zahlen beschränkt ist. Wenn der Verstand aber unendliche Zahlen definieren und unterscheiden kann, ist das einzig Richtige auch dem menschlichen Verstand das Prädikat „unendlich“ zu geben. Er vertritt die Ansicht, „*daß der menschliche Verstand eine unbegrenzte Anlage für die stufenweise Bildung von ganzen Zahlenklassen hat, die zu den unendlichen Modis in einer bestimmten Beziehung stehen und deren Mächtigkeiten von aufsteigender Stärke sind*.“[55]

Cantor erkennt auch, dass man die Regeln des Endlichen nicht ohne weiteres auf das Unendliche übertragen kann. Meint man nämlich, dass eine unendliche ganze Zahl nicht existieren kann, da sie sowohl gerade als auch ungerade sein müsste und beide Merkmale nicht auf einmal auftreten können, so ist dies ein Trugschluss. Durch jede Verallgemeinerung oder Erweiterung werden Besonderheiten aufgegeben, so auch hier. Schon bei der Einführung der komplexen Zahlen war dies der Fall, konnte man doch weder sagen, dass sie

[55] Cantor G.: „Gesammelte Abhandlungen“, Seite 177

positiv oder negativ sind. Zum leichteren Verständnis bringt Cantor hier ein einfaches Beispiel, dass ω weder gerade noch ungerade ist: ω kann weder durch die Form $2 \cdot \alpha$ oder $2 \cdot \alpha + 1$ dargestellt werden. Damit ist die Natur von ω eine ganz andere als die der „herkömmlichen Zahlen".

Der Begriff des Kontinuums führte bei der Entwicklung der Wissenschaften häufig zu Meinungsverschiedenheiten und Streitigkeiten. Cantor versucht daher den Begriff mit Rücksicht auf die mathematische Mengenlehre zu entwickeln. Dazu ist seiner Meinung nach der Begriff der Zeit nicht nötig, da er nur eine Vorstellung ist, „*die zu ihrer deutlichen Erklärung den von ihr unabhängigen Kontinuitätsbegriff zur Voraussetzung hat und sogar mit Zuhilfenahme desselben weder objektiv als eine Substanz, noch subjektiv als eine notwendige apriorische Anschauungsform aufgefasst werden kann, sondern nichts anderes als ein Hilfs- und Beziehungsbegriff ist, durch welchen die Relation zwischen verschiedenen in der Natur vorkommenden und von uns wahrgenommenen Bewegungen festgestellt wird*."[56] Objektive oder absolute Zeit kommt in der Natur nirgends vor. Das selbe gilt für den Raum.

4.4 Ausblick

4.4.1 Weitere Entwicklungen in der Mengenlehre

Innerhalb kurzer Zeit wurde die Mengenlehre eine eigenständige mathematische Disziplin. Hielt Felix Hausdorff (1868 - 1942) 1901 die erste Vorlesung über Mengenlehre noch vor 3 Studenten, so änderte sich dies sehr bald. Derselbe gab 1914 ein Buch mit dem Titel „*Grundzüge der Mengenlehre*" heraus, das das erste systematische Lehrbuch der Mengenlehre darstellt. Als anfängliches Hemmnis stellten sich aber verschiedene Antinomien heraus, die zum Teil schon während Cantors Lebzeiten bekannt wurden, und die auf der uneingeschränkten Mengenbildung beruhen, wie z. B. die Menge aller Ordinalzahlen oder die Menge aller Mengen. Welche Kardinalzahl müsste diese Menge haben? Einerseits müsste sie größer sein als alle bisherigen Kardinalzahlen, andererseits hatte Cantor aber selbst bewiesen, dass man eine Menge mit höherer Kardinalzahl durch Bildung ihrer Teilmengen erzeugen kann. Somit konnte sie nicht mehr die größte Kardinalzahl besitzen. Cantor selbst wusste um die Schwierigkeiten solcher „Mengen"bildungen, doch waren sie für ihn nicht bedeutsam. Man kann derartige Gesamtheiten eben nicht als „*actuell existirend denken*"[57].

Um die Antinomien zu vermeiden, wurden Axiomensysteme für die Mengenlehre entwickelt. Ein erstes stammt von Zermelo (1871 – 1953) aus dem Jahre 1908 (auf das ich hier aber nicht näher eingehe[58]). Die Axiome sind hier nicht absolut gültige Wahrheiten, sondern dienen als Voraussetzung zum Umgang mit inhaltlich offengelassenen Begriffen und zur Ableitung von Aussagen solcher Begriffe. Sein System wurde von Fraenkel[59] (1891 – 1965) und Skolem (1887 – 1963) vervollständigt.

[56] derselbe, Seite 191f
[57] Purkert W., Ilgauds H.J.: „Georg Cantor, 1845 – 1918", Seite 226
[58] Siehe Zermelo E.: „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre", Math. Ann. 65, 1908
[59] Seither heißt dieses System das Zermelo-Fraenkelsche System.

Im Zermelo-Fraenkelschen System nimmt das sogenannte Auswahlaxiom eine Sonderstellung ein – es löste viele Kontroversen aus: „*Wenn S eine (endliche oder unendliche) Menge nicht-leerer Mengen ist, und wenn keine zwei Mengen in S ein gemeinsames Element haben, dann ist es möglich, eine neue Menge zu bilden, die „Auswahlmenge", die aus genau einem Element jeder der Mengen in S besteht*."[60] Ist dieses Axiom für endliche Mengensysteme einleuchtend, so stellt sich bei unendlichen Mengensystemen die Frage, wie man eine Auswahl treffen soll. Gödel und Cohen zeigten, dass das Auswahlaxiom von den übrigen Zermelo-Fraenkelschen Axiomen unabhängig ist. Durch die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von den übrigen Zermelo-Fraenkelschen Axiomen gibt es die Möglichkeit nicht-Cantorscher Mengenlehren.

1910 versuchten Russell (1872 – 1970) und Whitehead (1861 – 1947) einen anderen Aufbau, nämlich einen Stufenaufbau der Mengenlehre in dem Werk „*Principia mathematica*". Hier tritt auch erstmals das Unendlichkeitsaxiom auf, dessen man sich heute bedient um die Existenz einer unendlichen Menge zu sichern.
Der Grundgedanke von Russell und Whitehead besteht darin, das Element-Mengen-Verhältnis durch eine Typenordnung der in den erzeugenden Bedingungen auftretenden Variablen zu regeln. Variablen vom 0-ten Typ erscheinen als Variablen für Elemente der jeweiligen Grundmenge. Variablen für Mengen von Grundelementen sind Variablen vom Typ 1. Variablen für Mengen derartiger Mengen sind vom Typ 2 usw. Die Typenregel verlangt nun, dass Ausdrücke der Form $x \in y$ und $x \notin y$ nur auftreten dürfen, wenn y eine um einen Typus höhere Variable ist als x. In Rahmen dieser Theorie konnte auch die Definition der Kardinalzahl als Äquivalenzklasse gleichmächtiger Mengen gesichert werden.

Erst Hilbert (1862 – 1943) versuchte für die axiomatische Mengenlehre einen Widerspruchsfreiheitsbeweis zu führen und begründete damit ca. 1920 das Programm des Formalismus mit folgenden Voraussetzungen:

1. Die mathematischen Theorien sind auf Axiome zurückführbar. Diese kann man in der Symbolsprache eines Logik-Kalküls darstellen.
2. Man kann solche Logik-Kalküle benutzen, mit denen man sämtliche logische Folgerungen aus dem jeweiligen Axiomensystem nach Regeln mechanisch ableiten kann.

Nun dachte sich Hilbert das formalisierte Axiomensystem einer Theorie mit der dazugehörigen Logik zu einem formalen System vereinigt. Dies behandelte er wie ein in sich geschlossenen Ganzes, das unabhängig von jeder Deutung ist. Um nun den Widerspruchsfreiheitsbeweis führen zu können, bediente sich Hilbert der sogenannten „Metamathematik" oder „Beweistheorie". Diese beschäftigt sich mit den Zeichenreihen und liefert als gesichert angesehene (finite) Kontrollmethoden für einen kalkülmäßigen Beweis. Der Widerspruchsfreiheitsbeweis konnte schließlich für einige Axiomensysteme, die in der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe formuliert wurden, geführt werden, doch konnte Gödel 1931 zeigen, dass ein globaler Widerspruchsfreiheitsbeweis nicht mit den Mitteln des Systems geführt werden kann.

[60] Maor E.: „Dem Unendlichen auf der Spur", Seite 295

Wie erwähnt, wird seit Beginn des 20. Jahrhunderts die Existenz unendlicher Mengen durch ein Unendlichkeitsaxiom gefordert. Dies wurde notwendig, da sich alle Beweise, dass es solche Mengen gibt, als falsch herausstellten. Als Beispiel sei der Versuch von Richard Dedekind (1831 - 1916) angeführt. Einen Gegenstand unseres Denkens bezeichnet er als Ding, angegeben durch einen Buchstaben, z. B. *a, b, c*... Es ist vollkommen durch das bestimmt, was von ihm aus gedacht oder ausgesagt werden kann. Wird von zwei Dingen *a* und *b* dasselbe gedacht, so sind sie ident: $a = b$. Verschiedene Dinge können zu einem System S zusammengefasst werden; *a, b, c,* ... sind dann die Elemente des Systems S. S ist als Gegenstand unseres Denkens wieder ein Ding. Allerdings werden Systeme, die aus keinem Ding bestehen, nicht zugelassen. Sind Elemente eines Systems A auch Elemente von S, so ist das System A ein Teil von S und ein echter Teil, wenn A zwar Teil von S ist, aber verschieden von S.

In seinem 1888 erschienen Werk „*Was sind und was sollen die Zahlen*" gibt Dedekind dann eine Definition des Unendlichen: Ein System S heißt unendlich, wenn es zu einem echten Teil von sich selbst ähnlich ist, andernfalls heißt S endlich. Dabei sind zwei Systeme R und S einander ähnlich, wenn es eine ähnliche (= injektive) Abbildung φ von S nach R gibt, derart, dass $\varphi(S) = R$. Auf diese Definition folgt der entscheidende Satz, dass unendliche Systeme existieren. Diesen beweist Dedekind folgendermaßen:

Beweis:
Dedekind behauptet, dass die Gesamtheit S aller Dinge, die Gegenstand meines Denkens sein können, unendlich ist. Ist z. B. der Gedanke $s \in S$, so ist auch der Gedanke $s' \in S$, wobei s' bedeutet, dass s Gegenstand meines Denkens sein kann. s' kann man nun als Bild φ(s) von s ansehen. Dann ist die dadurch bestimmte Abbildung φ offensichtlich ähnlich und hat folgende Eigenschaft: das Bild von S' ist ein echter Teil von S. Dies kann dadurch begründet werden, dass es in S Elemente gibt, die von sämtlichen Gedanken s' verschieden sind und damit nicht in S' enthalten sind, z. B. mein eigenes Ich.

$\square$

In späteren Auflagen dieses Werkes hat Dedekind in der Einleitung erklärt, dass dieser Satz vielleicht nicht schlüssig ist, da zweifelhaft ist, ob die Gesamtheit S eine Menge bildet.

Gegen die Annahme eines Unendlichkeitsaxioms gab es immer wieder Einwände. Den radikalsten Standpunkt nahm wohl Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 - 1966) ein, der bedeutendste Vertreter des sogenannten Intuitionismus. Für ihn ist die effektive Konstruktion das einzig zugelassene Mittel zur Definition von mathematischen Objekten und bei Existenzbeweisen. Daher lehnt er die axiomatische Methode ab, und natürlich auch das Unendlichkeitsaxiom. Ja für Brouwer kann es daher auch gar kein aktual Unendliches geben. Ohne im Detail auf diesen Standpunkt eingehen zu wollen, sei hier nur kurz ein klassisches Argument dafür angeführt:

Gegeben sei die Folge $\psi(n) = 2n + 1$, $n \geq 1$, der ungeraden natürlichen Zahlen größer als 1. Schon seit langem beschäftigt die Mathematiker die Frage, ob in dieser Folge auch vollkommene Zahlen vorkommen. Dabei heißt eine natürliche

Zahl $n \neq 1$ vollkommen, wenn sie der Summe ihrer positiven Teiler $\neq n$ gleich ist. Beispiele für vollkommene Zahlen sind 6 = 1 + 2 + 3, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.

Für den Beweis der Aussage, dass in der obigen Folge vollkommene Zahlen vorkommen, müsste man die Folge der natürlichen Zahlen, z. B. mit Hilfe eines Computers, durchlaufen und jede Zahl prüfen. Dies ist jedoch ein hoffnungsloses Unterfangen. Es wäre aber auch möglich, dass es sowohl für die Aussage als auch für die Negation der Aussage keine Beweismöglichkeit gibt.

Angenommen aber, es ist in endlich vielen Schritten nicht möglich, die Frage zu entscheiden. Dann ergeben sich zwei Möglichkeiten:

(1) In der als vollendet angesehenen Menge $\{\psi(n), n \geq 1\}$ kommt rein zufällig eine vollkommene Zahl vor. Dies bedeutet dann aber einen Widerspruch in sich, da man diese Zahl durch ein endliches Verfahren erhalten hätte können.

(2) Sämtliche Elemente $\psi(n)$ sind bloß zufällig nicht-vollkommen. Brouwer nennt dies eine „fliehende Eigenschaft", da fraglich ist, ob es einen Sinn hat, der Folge eine Eigenschaft zuzuschreiben, die nicht gesetzmäßig ist. Der Intuitionismus verneint dies, womit sowohl die Aussage als auch ihre Negation eintreten kann. Damit kann der Satz vom ausgeschlossenen Dritten auf abgeschlossene unendliche Gesamtheiten nicht mehr angewandt werden.

Daraus ergeben sich erhebliche Konsequenzen z. B. für die Analysis. Es ist im Allgemeinen nicht mehr möglich zwei Zahlen, die durch eine unendliche Dezimalbruchentwicklung gegeben sind, zu vergleichen, d.h. zu sagen, ob sie identisch sind oder nicht. Seien z. B. r_1 und r_2 zwei reelle Zahlen mit $r_1 = 0 = 0{,}0000\ldots$, $r_2 = 0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, wobei für die α_n gilt:

$$\alpha_n = \begin{Bmatrix} 0, \text{ falls } \psi(n) \text{ nicht - vollkommen} \\ 1, \text{ falls } \psi(n) \text{ vollkommen} \end{Bmatrix}$$

Die Intuitionisten sind der Meinung, dass eine unendliche Dezimalzahl dann gegeben ist, wenn man sie als endliche Dezimalzahl mit beliebig vielen Stellen nach dem Komma auf die jeweilige Anzahl von Dezimalstellen genau erfassen kann. Dementsprechend wird r_2 nicht als ein Fertiges angesehen und es gilt weder $r_1 = r_2$ noch $r_1 \neq r_2$. Damit lassen sich aber wichtige Sätze der Analysis, wie der Zwischenwertsatz oder der Satz vom Maximum nicht mehr aufrechterhalten.

Der Fundamentalsatz der Algebra (als ein Beispiel) ist vom intuitionistischen Standpunkt aus aber schon beweisbar.

<u>Fundamentalsatz der Algebra</u>[61]: Jede algebraische Gleichung $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + b = 0$, wo nicht alle $a_i = 0$ sind, besitzt zumindest eine komplexe Lösung.

[61] Behnke H., Remmert R., Steiner H.-G., Tietz H. „Das Fischer Lexikon", Seite 243

Hier muss man die Forderung „nicht alle $a_i = 0$“ durch „mindestens ein $a_i \neq 0$“ ersetzen. Die ursprüngliche Formulierung wird schon durch folgendes Beispiel widerlegt: $r_2\, x - 1 = 0$. Hier gibt es keine Lösung, wenn vorausgesetzt wird, dass weder $r_2 = 0$ noch $r_2 \neq 0$.

4.4.2 Nonstandard Analysis

Robinson Abraham (1918 – 1974), ein Schüler von Fraenkel, gilt als Begründer dieser Disziplin. Den Anstoß für seine Bemühungen gab die noch immer ausständige Definition für die Infinitesimalen von Leibniz (und Newton). Bei einem Treffen der „*American Mathematical Society*“ und der „*Mathematical Association of America*“ 1961 präsentierte Robinson das erste Mal seine Lösung für die Definition der Infinitesimalen. Diese Theorie nennt er Nonstandard Analysis.

Ausgangspunkt ist ein Ergebnis von Skolem, der 1933 nachwies, dass für das Peano-Axiomensystem ein Modell existiert, das mehr Elemente enthält als das Standard-Modell von $\mathbb{N}$. Dennoch besitzt es dieselben Eigenschaften.

Diese Methode wandte nun Robinson auf den Körper der reellen Zahlen an. Auch hier gibt es Nonstandard Modelle, in Form eines nicht-archimedischen, total geordneten Gebietes, das $\mathbb{R}$ umfasst. Dies führt zur Möglichkeit der Erweiterung aller Eigenschaften von $\mathbb{R}$, sowie aller elementaren reellen Funktionen auf das erweiterte Gebiet. Man kann ihr Verhalten im Rahmen dieses neuen Bereichs studieren, der sowohl unendlich kleine als auch unendlich große Zahlen enthält.

Axiomatisch lassen sich diese sogenannten hyperreellen Zahlen folgendermaßen definieren:[62]

1. Die hyperreellen Zahlen bilden einen Körper. Dieser umfasst den Körper der reellen Zahlen.
2. Die hyperreellen Zahlen sind vollständig und angeordnet.
3. Es existiert eine positive infinitesimale hyperreelle Zahl; dabei ist eine Zahl infinitesimal, wenn kein Vielfaches mit einer natürlichen Zahl größer als 1 ist.
4. Zu jeder endlichen hyperreellen Zahl existiert genau eine reelle Zahl (Standardanteil), von der sie sich um eine infinitesimale Größe unterscheidet. Dadurch wird eine surjektive Funktion festgelegt, die jeder endlichen hyperreellen Zahl eine reelle Zahl zuordnet.
5. Jede reelle Funktion besitzt eine eindeutig bestimmte Erweiterung auf die hyperreellen Zahlen, wobei den algebraischen Verknüpfungen des hyperreellen Zahlenkörpers die Erweiterungen der algebraischen Verknüpfungen des reellen Zahlenkörpers entsprechen.
6. Besitzen zwei Systeme von Aussageformen genau die gleichen reellen Lösungen, so besitzen sie auch die gleichen hyperreellen Lösungen.

[62] Das folgende Modell stammt von Keisler, in: Volkert K.: „Geschichte der Analysis“, Seite 105

Somit erhält man (durch 1. und 3.) unendlich viele infinitesimale Größen. Dadurch kann man die grundlegende „infinitesimal benachbart"-Relation definieren: *„Zwei hyperreelle Zahlen x und y heißen infinitesimal benachbart (im Zeichen x ≈ y), wenn |x – y| infinitesimal ist*."[63] Alle hyperreellen Zahlen, die zu einer reellen Zahl *x* infinitesimal nahe sind, bilden die sogenannte Monade von *x* (Mon (*x*)). Diese kann man auch so charakterisieren:

Mon (*x*) = {*y*/*y* hyperreell und st (*y*) = *x*}, wo st (*y*) der Standardteil von *y* ist.

Nun kann man die Grundbegriffe der Analysis, z. B. Stetigkeit oder Differenzierbarkeit, in diesem neuen Bereich definieren:

- Eine reelle Funktion *f* heißt stetig in $a \in \mathbb{R}$, wenn aus $a \approx x$ folgt, dass $\tilde{f}(x) \approx \tilde{f}(a)$, wo $\tilde{f}$ die eindeutige Erweiterung von *f* ist (Axiom 4.).
- Eine reelle Funktion *f* heißt differenzierbar in *a*, wenn für alle hyperreellen Zahlen *x* mit $x \approx a$ st ($\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(a)}{x-a}$) existiert und übereinstimmt.

Es lässt sich zeigen, dass sich fast alle Ergebnisse, die früher nur mit Anwendung unendlich kleiner Größen ableitbar waren, im Körper der hyperreellen Zahlen formal begründen lassen. Eine späte Rechtfertigung für Newton, Leibniz und Euler.

[63] Volkert K.: „Geschichte der Analysis", Seite 105